This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math
5008
55

Math 5008.155

SCIENCE CENTER LIBRARY

Bought from the Bequest of

Horace Appleton Haven

Class of 1842

For the Purchase of
Books on Astronomy and Mathematics

DES

MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

DES

MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE,

PAR PAUL SERRET,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

« Il serait à désirer qu'on ne laissât pas autant dans l'oubli certains résultats des travaux des géomètres des siècles passés, et qu'on revînt un peu sur les principes presque toujours faciles et souvent ingénieux à l'aide desquels les grands hommes de ce temps-là y étaient parvenus; car ce ne sont pas tant les vérités particulières que les méthodes qu'il ne faut pas laisser périr. »

(PONCELET, *Propriétés projectives*, page 368.)

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1855

Math 5008.55

HARVARD COLLEGE LIBRARY

$1.50

2946
49.63
30

PRÉFACE.

Si l'on doit juger de l'excellence d'une institution uniquement d'après les résultats qu'elle a fournis, d'après les fruits qu'elle a portés, il est peu d'institutions humaines qui paraissent plus excellentes et plus utiles que celle de l'École Polytechnique : née d'hier, elle a déjà ses titres de noblesse; et ces titres, personne ne les lui conteste, car ils sont en bonne forme et revêtus des noms glorieux de la plupart des inventeurs du siècle.

Toutefois, si la création de l'École Polytechnique a été la réalisation d'une grande pensée, la marche suivie dans son enseignement intérieur, la direction qu'elle a imprimée aux études scientifiques extérieures, et même les travaux incessants des maîtres et des élèves, ont eu ce résultat, fâcheux selon nous, de créer autour de l'étudiant en mathématiques une atmosphère artificielle, le faisant vivre dans le présent, mais le séparant complétement du passé; réfléchissant vers lui toutes les lumières de l'analyse contemporaine, mais absolument impénétrable aux rayons de la Géométrie moderne. Pour celui qui vit dans un pareil milieu, l'histoire des mathématiques ne paraît guère commencer sérieusement qu'à l'époque de la fondation de l'École Polytechnique. C'est là l'origine du monde, le commencement du temps, de la lumière et de l'ordre, au delà duquel on trouverait sans doute les ténèbres et le chaos.

Aussi les méthodes des inventeurs sont-elles généralement ignorées des élèves; elles ont disparu sous l'uniformité d'une analyse élégante; et si leurs noms sont prononcés quelque-

fois, il semble que ce soit moins par déférence que pour la commodité du discours.

Cette adoration du présent et cet oubli du passé se traduisent parfois d'une manière naïve : ainsi l'on dit généralement *la formule de Petit* (1) ou *la formule de M. Ch. Dupin* (2); il serait en effet de mauvais goût, en pareille matière, de faire remonter ses connaissances historiques au delà de 1794, et d'attribuer une formule à celui qui l'a donnée pour la première fois, celui-ci s'appelât-il le marquis de l'Hôpital ou Maclaurin.

Par un contraste remarquable, c'est d'une façon tout opposée que l'on procède dans les études littéraires. Là le culte du passé fleurit dans toute sa splendeur : les grandes voix des poëtes, des philosophes, des historiens qui vivaient il y a deux mille ans, dominent toutes les voix du siècle; et si leurs œuvres renferment des beautés éternelles, on n'est pas injuste envers eux, et l'admiration qu'ils inspirent demeure éternellement jeune. Et je ne sache pas de plus éloquente louange des gloires littéraires de l'antiquité, que le spectacle donné depuis vingt siècles par chaque génération nouvelle venant continuer, avec les esprits les plus profonds et les plus élégants de la Grèce et de Rome, ce commerce non encore interrompu qui forme la chaîne vivante du passé au présent, et dont Descartes a si bien caractérisé le charme et l'utilité, en le présentant comme « une conversation avec les plus honnêtes gens des temps passés, et même une conversation étudiée en laquelle ils ne nous découvrent que les meilleures de leurs pensées (3) ».

Ainsi l'antagonisme entre le présent et le passé qui se manifeste dans tous les développements de la pensée moderne, se retrouve encore à l'état latent sans doute, mais avec une incontestable réalité, dans les voies contraires de nos deux

---

(1) Problème des caustiques.
(2) Expression du rayon de courbure de l'ellipse.
(3) Discours de la Méthode.

enseignements littéraire et scientifique. Or, si les méthodes opposées que l'on suit dans l'un et dans l'autre ont cependant porté leurs fruits, quels résultats plus excellents encore ne devrait-on pas attendre de l'introduction de la méthode historique dans l'enseignement scientifique actuel? Et sans parler de l'attrait que présente l'étude des origines de chaque science, de sa formation et de ses développements successifs, n'est-il pas infiniment probable que plusieurs des méthodes créées par les inventeurs pour résoudre certains problèmes aujourd'hui connus ou oubliés, pourront s'appliquer avec avantage à la solution de problèmes nouveaux, non encore formulés; et que, par suite, la connaissance de ces méthodes peut aider puissamment, dans leurs enfantements futurs, les esprits créateurs que nous réserve l'avenir?

Ces réflexions m'ont inspiré le désir de tenter cet ouvrage, dans lequel j'ai cherché à réunir, sous les titres généraux d'un petit nombre de méthodes et de problèmes, en même temps que les procédés d'investigation géométrique susceptibles d'une définition rigoureuse, la plupart des doctrines acquises à la géométrie infinitésimale pendant la première période de son histoire.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

DES MÉTHODES RELATIVES A LA GÉOMÉTRIE DES FIGURES FINIES.

CHAPITRE PREMIER.

Analyse de différentes méthodes que l'on peut suivre dans la solution des problèmes ou dans la démonstration des théorèmes de géométrie.

Réflexions générales sur l'utilité d'une classification des divers procédés que l'on peut employer pour résoudre les questions de géométrie, page 1.

Deux méthodes générales. — Analyse et synthèse, p. 2.

Première méthode. — Par substitutions successives. — Applications, p. 2.

Deuxième méthode. — Par construction. — Applications, p. 4.

Troisième méthode. — Par duplication, p. 6.

Quatrième méthode. — Par abstraction ou généralisation. — Application : théorème de Newton, p. 8.

Scolie. — De l'emploi des lieux géométriques et des courbes enveloppes. — Application, p. 10.

Cinquième méthode. — Par composition et décomposition, p. 10.

Sixième méthode. — Par les limites, p. 11.

Septième méthode. — Par la réduction à l'absurde. — Applications, p. 11.

Huitième méthode. — Par inversion. — Applications, p. 12.

Neuvième méthode. — Par les lignes, les aires ou les volumes auxiliaires. — Applications, p. 14.

Dixième méthode. — Par les solides auxiliaires. — Applications, p. 17.

Onzième méthode. — Par la transformation des figures. — Réflexions générales sur l'importance de cette méthode, p. 20.

CHAPITRE II.

De la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

§ Ier. — Principes généraux relatifs a la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

Définition des figures réciproques. — *Point-origine.* — *Puissance*, p. 21.

Relations entre la distance de deux points d'une figure et la distance des points *correspondants* de la figure réciproque, p. 21.

Égalité des angles *correspondants* de deux figures réciproques, p. 22.

Scolie. — On peut passer des propriétés *métriques* et *descriptives* d'une figure aux propriétés analogues de la figure réciproque, p. 23.

Correspondance des lignes de courbure dans deux surfaces réciproques; relations nouvelles entre les rayons de courbure des deux surfaces, p. 23.

Ligne ou surface réciproque d'une circonférence ou d'une sphère : 1° quand le *point-origine* appartient à la circonférence, ou à la sphère; 2° quand le point-origine est quelconque, p. 24.

Nouvelles définitions; relations entre une figure sphérique et sa projection stéréographique, p. 24.

§ II. — Application des principes précédents a diverses propositions de géométrie plane.

Transformation des propriétés descriptives des figures planes composées de lignes droites ou circulaires, p. 26.

Transformation des propriétés métriques des mêmes figures, p. 29.

§ III. — Application des mêmes principes a la trigonométrie sphérique.

Énoncé de diverses propriétés des triangles sphériques. — Observation sur les théorèmes de géométrie plane qui en résultent, p. 30.

Démonstration du théorème de Lexell. — Énoncé d'un théorème de M. Steiner. — Construction de l'excès sphérique, d'après Gudermann, p. 31.

Scolie. — Relations entre les angles d'un triangle sphérique ABC et du triangle rectiligne *abc* dont les sommets sont les projections stéréographiques des sommets du premier, p. 33.

Établissement des diverses formules de la trigonométrie sphérique, p. 34.

0. Relations entre les côtés du triangle sphérique ABC et ceux du triangle rectiligne *abc*, p, 34.

1. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$. (Démonstration.), p. 34.

2. $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c}$. (Démonstration.), p. 35.

3. $\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A$, p. 35.

4. $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$, p. 35.

5. Démonstration directe des formules de Delambre, p. 35.

6. Démonstration directe des analogies de Néper, p. 37.

7. Expressions des sinus et cosinus du demi-excès sphérique, obtenues directement, p. 38.

8. Expression de la tangente du quart de l'excès sphérique, p. 39.

9. Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère. — Théorème analogue à celui de Legendre, p. 39.

Établissement de quelques formules relatives aux quadrilatères sphériques, p. 41.

SECONDE PARTIE.

DES MÉTHODES RELATIVES A LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE.

CHAPITRE PREMIER.

Des tangentes.

§ Ier. — État du problème des tangentes dans la géométrie des anciens.

Définition de la tangente d'après Euclide. — Remarques sur l'insuffisance de cette définition et sur le caractère essentiellement synthétique qu'elle présente, p. 44.

De la tangente à la spirale d'Archimède, p. 45.

De la tangente à la courbe décrite par un point dont on connaît la loi des distances à deux foyers, p. 51.

§ II. — Méthode de Roberval.

Conception de Roberval sur la description générale des courbes par le mouvement d'un point. — Sa solution du problème des tangentes par la composition des différentes vitesses qui animent le point décrivant, p. 53.

Application aux cycloïdes et aux roulettes, p. 53.

Insuffisance de la méthode précédente. — Applications vicieuses qui en ont été faites, quoique sans erreur définitive, à des exemples auxquels elle doit rester étrangère, p. 54.

§ III. — Des tangentes aux courbes décrites par les différents points d'une figure plane donnée qui se meut dans son plan.

Définition des roulettes. — Méthode de Descartes pour la description des tangentes à ces courbes. — Expression de l'élément rectiligne, ou superficiel, de la courbe, qui résulte de l'emploi de cette méthode, p. 55.

Théorie des centres instantanés de rotation, p. 57.

Usage de la théorie précédente dans le problème des tangentes. — Examen des trois cas qui peuvent se présenter. — Applications, p. 60.

§ IV. — Définition de la tangente d'après les géomètres modernes. — Applications.

Diverses solutions du problème des tangentes, d'après Descartes, Fermat et Barrow. — Dernière définition de la tangente. — Formules, p, 61.

Applications :

1. Construire la tangente à la courbe décrite par un point dont on connaît la loi des distances à plusieurs foyers, p. 64.

2. Un polygone funiculaire plan, aux sommets duquel sont placés des points matériels de masses données, se mouvant dans son plan sous l'action d'une force qui est dirigée suivant le dernier côté du polygone; construire les tangentes aux courbes décrites par ses différents sommets, p. 67.

CHAPITRE II.

Des enveloppes.

§ Ier. — Énoncé du problème général des enveloppes.

Application de la méthode *par les solides auxiliaires* à la recherche de l'équation de la courbe enveloppe. — Théorème fournissant le point où une ligne plane, de forme et de grandeur invariables, qui se meut dans son plan, touche son enveloppe, p. 69.

§ II. — Étude du problème dans le cas spécial ou les lignes dont on cherche l'enveloppe sont des lignes droites.

Historique. — Méthode par la comparaison des vitesses angulaires, servant à déterminer le point où la droite mobile touche son enveloppe, dans chacun des deux cas qui peuvent se présenter, p. 71.

Applications :

1. L'enveloppe du rayon du cercle générateur d'une épicycloïde, qui aboutit au point décrivant, est une épicycloïde, p. 73.

2. La développée d'une épicycloïde est une épicycloïde semblable, p. 74.

3. Problème et formule des caustiques par réfraction, p. 76.

4. Définition et construction des caustiques secondaires d'après M. Quetelet. — Construction des ovales de Descartes et de leurs tangentes, p. 78.

5. Expression du rayon de courbure des roulettes. — Généralisation, p. 80.

6. Construire par points la développée de l'ellipse plane, p. 83.

7. Construire par points la développée de l'ellipse sphérique, p. 84.

8. Construire par points l'enveloppe du côté libre d'un polygone de périmètre constant, p. 87.

CHAPITRE III.

Du cercle osculateur.

§ Ier.

Définitions. — Théorème général de Maclaurin fournissant la corde du cercle

osculateur en un point d'une courbe algébrique. — Applications de ce théorème à la construction du cercle osculateur dans les coniques, quelles que soient les données par lesquelles ces courbes se trouvent définies. — Usage auxiliaire du théorème segmentaire de Newton, p. 88.

§ II.

Méthode de déformation employée par M. Ch. Dupin pour la détermination du cercle osculateur dans l'ellipse, p. 94.

Premier théorème. — Comparaison des rayons des cercles osculateurs de deux courbes ayant une tangente commune et dont les ordonnées, comptées à partir de la tangente, sont proportionnelles, p. 94.

Second théorème. — Tranformation d'une courbe en une autre osculatrice de la première en un point donné, p. 94.

Application : Rayon du cercle osculateur de l'ellipse en un point quelconque.

§ III.

Théorème général. — Comparaison des cercles osculateurs de deux courbes en des points correspondants à une même abscisse, quand les ordonnées correspondantes des deux courbes sont proportionnelles, p. 96.

Application : Rayon du cercle osculateur de l'ellipse. — Théorème de Mac-Cullagh, p. 97.

§ IV.

Définition de la *qualité de la courbure* d'une ligne, en un de ses points $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)$, d'après Newton. — Théorème fournissant une expression géométrique de ce rapport, et la solution d'un problème proposé par Carnot. — Solution directe de ce problème, p. 98.

CHAPITRE IV.

Des maxima et minima absolus.

§ Ier. — DE LA GRANDEUR MAXIMUM OU MINIMUM PARMI DES GRANDEURS DÉTERMINÉES.

Observation de Képler sur les variations d'une grandeur dans le voisinage de son maximum ou minimum, p. 103.

Théorème de Fermat. — Si a_0, a_1 sont deux états infiniment voisins d'une grandeur variable A, et comprenant entre eux le maximum ou le minimum a de cette grandeur, les valeurs extrêmes a_0, a_1 peuvent être regardées comme rigoureusement égales entre elles, p. 103.

Applications :

1. Droite minimum menée par un point donné dans un angle donné, p. 104.
2. Rectangle maximum inscrit dans un segment de courbe (Newton), p. 105.
3. Problème du plus petit crépuscule. — Historique. — Solution, p. 106.
4. Polygones à aire maximum (ou minimum) inscrits (ou circonscrits) à une courbe donnée. — Théorèmes généraux; applications au cercle, à l'ellipse, p. 108.
5. Polygones à périmètre maximum (ou minimum) inscrits (ou circonscrits)

à une courbe donnée. — Théorèmes généraux. — Applications au cercle et à l'ellipse; théorèmes de M. Chasles sur les ellipses homofocales, p. 109.

§ II. — De la grandeur maximum ou minimum parmi des grandeurs indéterminées.

Nouveaux problèmes sur les maxima et minima, leur définition d'après Jean Bernoulli et Euler. — Méthode de Maclaurin pour leur résolution; principe fondamental de cette méthode; manière générale de l'appliquer; il en résulte la définition de chacun des éléments de la grandeur maximum ou minimum que l'on cherche; sa comparaison avec la méthode analytique, p. 112.

Applications :

1. Lemme général, p. 113.

2. Problème de Fermat sur les routes de la lumière, p. 114.

3. Problème de la brachistochrone dans le cas ordinaire de la pesanteur, p. 115.

4. Problème de la brachistochrone dans le cas d'un centre attirant placé à une distance finie. — Examen du cas particulier où la courbe cherchée est une épicycloïde, p. 117.

5. Problème. — Trouver la courbe plane passant par deux points donnés, et engendrant une aire minimum par sa rotation autour d'un axe situé dans son plan, p. 119.

CHAPITRE V.

Des maxima et minima relatifs.

Définition du problème général qui consiste à déterminer parmi toutes les courbes pour lesquelles la fonction Φ de la courbe a une valeur constante, celle pour laquelle la fonction F de la courbe a une valeur maximum ou minimum.

Énoncé général de la méthode qui consiste à chercher la courbe pour laquelle la fonction $m\mathrm{F} + n\Phi$ de la courbe acquiert une valeur maximum ou minimum, m et n étant des nombres indéterminés; remarque sur la détermination ultérieure de ces nombres, p. 120.

Applications :

1. Brachistochrone parmi toutes les courbes d'une longueur donnée, la pesanteur s'exerçant par des parallèles, p. 121.

2. Brachistochrone parmi toutes les courbes d'une longueur donnée, la pesanteur s'exerçant par des droites concourantes, p. 122.

3. Parmi toutes les lignes planes d'une longueur donnée, réunissant deux points donnés, trouver celle qui, par sa rotation autour d'un axe situé dans le même plan, engendre une aire minimum, p. 123.

4. De la ligne qui renferme la plus grande aire parmi toutes les lignes d'égale longueur, p. 123.

CHAPITRE VI.

De la méthode par décomposition en éléments correspondants.

Enoncé des deux problèmes généraux auxquels s'applique cette méthode. —

Elle remplit en géométrie le rôle réservé dans l'analyse au calcul intégral, et doit fournir à celui-ci le principe de ses transformations, p. 124.

Applications :

1. Attraction d'une sphère sur un point extérieur (Newton), p. 125.

2. Attraction d'un cylindre indéfini sur un point extérieur, p. 128.

3. Théorie géométrique des courbes tautochrones, d'après Newton. — Principe fondamental. — Applications : 1° au cas ordinaire de la pesanteur ; 2° au cas d'un centre attirant situé à une distance finie ; cas spécial de l'épicycloïde, p. 129.

4. Problème de Viviani sur la voûte carrable. — Solutions en nombre infini, d'après Leibnitz et Jean Bernoulli. — Identité de l'une des solutions fournies par ce dernier avec celle de Viviani. — Observation de Bossut sur une solution particulière du problème de la voûte cubable d'Euler, p. 132.

5. Rectification des épicycloïdes allongées ou raccourcies, d'après Pascal, p. 135.

6. Seconde solution du même problème. — Formules, 136.

7. Démonstration nouvelle du théorème de Fagnano, p. 139.

8. Théorèmes de M. Chasles sur les arcs d'ellipse à différence rectifiable, p. 141.

9. Construction géométrique des rayons de deux cercles dont les circonférences comprennent entre elles le périmètre d'une ellipse donnée. — Construction semblable s'appliquant à la détermination des limites inférieure et supérieure d'un arc quelconque d'ellipse. — Enoncé d'un théorème de Bernoulli (Jean) fournissant une approximation plus rapide, mais s'appliquant seulement à l'évaluation du périmètre total de l'ellipse, p. 142.

DES

MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE.

PREMIÈRE PARTIE.

DES MÉTHODES RELATIVES A LA GÉOMÉTRIE DES FIGURES FINIES.

CHAPITRE PREMIER.

Analyse de différentes méthodes que l'on peut suivre dans la solution des problèmes ou dans la démonstration des théorèmes de géométrie.

1. *Réflexions générales sur l'utilité d'une classification des divers procédés que l'on peut employer pour résoudre les questions de géométrie.* — Nous nous proposons, dans ce chapitre, de présenter une classification rationnelle des différentes méthodes que l'on emploie en géométrie pour la démonstration des vérités déjà acquises ou pour la solution des problèmes.

Sans doute une pareille classification aura quelque chose d'arbitraire, et les méthodes auxquelles nous donnerons des dénominations différentes, en les regardant comme parfaitement distinctes, pourront avoir bien des points de ressemblance. Toutefois, et malgré ce défaut inévitable, une classification aura cet avantage de définir d'une manière plus nette plusieurs des méthodes que peut suivre l'esprit dans ses efforts pour établir une vérité géométrique, et qu'il suit quelquefois confusément, en ne se rendant pas un compte exact des opérations auxquelles il se livre : elle éclairera les routes que nous avons suivies pour l'établissement des vérités élémentaires; et, donnant pour ainsi dire à chacune d'elles un numéro d'ordre, elle nous permettra de les aborder successivement, sans confusion, jusqu'à celle qui nous montrera d'une manière plus visible le but que nous voulons atteindre.

Ainsi que le fait observer M. Lamé dans son excellent ouvrage : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, la multiplicité même des moyens que peut employer la géométrie pour arriver au but proposé, paraît d'abord devoir écarter les méthodes générales et laisser l'esprit incertain de la route qu'il doit choisir parm toutes celles qui sont ouvertes devant lui.

Cette incertitude, qui, en laissant de côté des hasards heureux, frappe de stérilité les recherches inhabiles, provient précisément de l'absence de méthodes nombreuses et nettement définies parmi lesquelles on puisse, par des essais successifs, rechercher celle qui s'adapte le mieux à la question proposée.

Nous allons commencer l'exposition de plusieurs de ces méthodes, en avertissant, ce qui sera sans doute superflu, que nous n'attachons pas une réalité absolue à la séparation ou classification que nous en avons faite, et que nous sommes surtout très-éloigné de croire avoir prévu toutes les voies que l'on peut suivre dans la recherche directe des vérités géométriques.

2. *Deux méthodes générales. — Analyse et Synthèse.* — Les moyens si variés que l'on peut employer pour établir une proposition de géométrie peuvent tous se rattacher à deux méthodes principales : la méthode par analyse et la méthode par synthèse.

1°. Une proposition sera démontrée par la méthode analytique si, en prenant pour point de départ les relations données, *explicitement* ou *implicitement*, entre les éléments que l'on considère, on parvient, par un dénombrement complet de toutes ces relations, ou seulement par un choix intelligent des relations *utiles* et leur transformation, à faire voir qu'elles entraînent nécessairement les relations affirmées par la proposition.

2°. La synthèse peut arriver au même but par deux voies distinctes :

Soit en excluant entre les éléments considérés toutes relations différentes de celles affirmées par la proposition (*Voir* ci-après la méthode par la réduction à l'absurde);

Soit en admettant les relations à démontrer, les prenant pour point de départ, et faisant voir que, par un enchaînement *mutuel*, elles entraînent des relations comprises dans les relations données.

Il est peut-être inutile d'ajouter que l'on ne saurait parvenir à la solution d'un problème quelconque que par une suite de raisonnements dépendant essentiellement de la méthode analytique, la synthèse pouvant intervenir *seulement* dans la démonstration de la solution à laquelle on est parvenu. (*Examen des différentes méthodes*, pages 9 et 10.)

Nous allons passer maintenant à l'exposition de plusieurs méthodes particulières, moins vastes que les deux méthodes générales que nous avons dû signaler, et par cela même plus utiles, et dont chacune devra être regardée comme s'appliquant plus spécialement à une certaine classe déterminée de questions, quoique la solution d'un problème pris au hasard puisse exiger l'intervention simultanée de plusieurs d'entre elles.

3. **PREMIÈRE MÉTHODE.** — *Par substitutions successives.* — Dans cette méthode, on fait dépendre la solution de la question proposée d'une question plus simple, celle-ci d'une troisième, etc., jusqu'à ce que l'on arrive enfin à un dernier problème dont la solution soit évidente ou simplement connue.

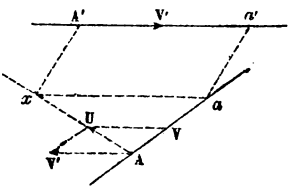
Cette méthode intervient dans la solution de presque tous les problèmes

de géométrie, en se combinant avec les différentes méthodes que nous avons encore à examiner; et la marche qu'elle suit est tout à fait comparable à celle de l'analyse, dans la résolution des équations par les transformations successives qu'elle leur fait subir. (*Examen des différentes méthodes*, page 12.)

APPLICATIONS.

PROBLÈME I. — *Deux mobiles se mouvant uniformément et en ligne droite, on propose de construire les positions occupées par ces mobiles à l'instant où la distance qui les sépare est minimum.*

Solution. — Observons d'abord que si, dès l'origine du mouvement, on attribue aux deux mobiles A, A′ deux nouvelles vitesses composantes égales, parallèles et de même sens, dans la nouvelle marche simultanée des deux mobiles, la droite *mm′* qui, à l'époque quelconque *t*, mesure leur distance, sera égale (et parallèle) à la droite MM′ qui eût mesuré leur distance à la même époque dans leur mouvement primitif : ceci résulte immédiatement de la composition des vitesses. Cela posé, communiquons à chacun des deux mobiles A et A′, une vitesse égale et contraire à celle de A′; ce dernier restera en repos. Quant au mobile A, si AV représente sa vitesse primitive et si nous menons AV′ égale, parallèle et de sens contraire à la droite qui représentait la vitesse de A′ dans le mouvement primitif, la diagonale AU du parallélogramme construit sur AV, AV′ représentera la vitesse du mobile A dans son nouveau mouvement. D'ailleurs, d'après la remarque qui a été faite plus haut, la question proposée sera ramenée à la suivante :



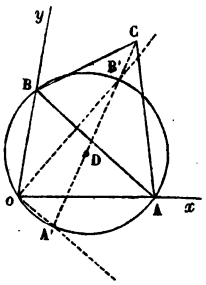
Étant donnés un point fixe A′ *et un point* A *qui décrit une droite* AU, *construire la position du point mobile pour laquelle sa distance au point fixe est minimum.*

Or on obtient immédiatement la réponse à cette dernière question en abaissant du point A′ une perpendiculaire A′*x* sur la droite AU; et si l'on veut passer de la construction du second problème à la construction du premier, on mènera *xa* parallèle à A′V′, et rencontrant AV en *a*; et la droite *aa′*, égale et parallèle à *x*A′, sera la distance minimum des deux mobiles A et A′ dans leur mouvement primitif.

Observation. — On trouve dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome II, page 22, une solution analytique de ce problème, par *Puissant*.

PROBLÈME II. — *Les deux premiers sommets d'un triangle* ABC *glissant sur deux droites fixes* O*x*, O*y*, *trouver la nature du lieu décrit par le troisième sommet.*

Solution. — Prenant la figure mobile dans l'une quelconque de ses posi-



tions, construisons la circonférence OAB, joignons son centre D au sommet libre C par une droite qui coupe la circonférence en A', B', et menons les droites indéfinies OA', OB'.

Si l'on remarque que, le triangle ABC étant donné, ainsi que l'angle yOx, la grandeur de la circonférence OAB et la position de son centre D, par rapport au triangle ABC, sont *déterminées*, on pourra concevoir que cette circonférence participe au mouvement du triangle, et l'on verra que, dans le mouvement commun résultant, les différents segments de la droite A'DB'C conservent des grandeurs invariables.

Or, il est facile d'établir que les droites indéfinies OA', OB' sont *déterminées* et demeurent immobiles dans le mouvement général que nous venons de substituer au premier. En effet, les angles de OA avec OB, de OA' avec OB', et de CD avec AB demeurant constants, les sommes arc BB' + arc AB', arc AB' + arc AA', arc AA' + arc BB' demeurent aussi constantes : donc les arcs BB', AB', AA' sont constants, et les directions OA', OB' sont *déterminées*.

Il résulte de là que le mouvement du point C, considéré comme sommet libre du triangle ABC, est le même que le mouvement du point C considéré comme appartenant à la droite A'B'C dont les points A' et B' glissent sur les deux axes rectangulaires OA', OB'; et le problème est ramené au suivant, dont la solution est connue :

Deux points d'une droite glissant sur deux axes rectangulaires, trouver la nature du lieu décrit par un troisième point de cette droite.

Le lieu primitif est donc une ellipse ayant pour centre le point O.

4. DEUXIÈME MÉTHODE. — *Par construction.* — Cette méthode consiste à substituer à la définition en langage ordinaire de certain élément d'une figure une construction géométrique équivalente qui mettra souvent en lumière des relations utiles à la solution de la question proposée. Il pourra même arriver que cette construction modifiée laisse subsister les mêmes relations, et la méthode actuelle fournira alors, en même temps que la réponse à la question proposée, la solution d'une question nouvelle.

A cette méthode se rattache encore l'emploi des constructions auxiliaires d'une si grande importance dans la solution des questions de géométrie, mais pour le choix desquelles il est presque impossible d'assigner des règles générales. On peut toutefois indiquer une de ces constructions qui trouve son application dans beaucoup de cas, et qui consiste à fixer la position des points, connus ou inconnus, par rapport à l'ensemble de la figure, en menant par chacun de ces points des parallèles à deux droites de la figure terminées à ces droites.

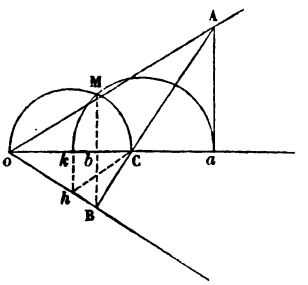
D'ailleurs la méthode actuelle ne doit pas être regardée comme une méthode particulière, indépendante de celles que nous avons déjà examinées; mais seulement comme une méthode de détail, destinée à prêter son appui à toutes les autres.

APPLICATIONS.

PREMIÈRE QUESTION. — PROBLÈME. — *Par un point* C, *situé sur la bissectrice d'un angle* O, *on mène une transversale coupant en* A, B, *les côtés de l'angle, et par les points* A *et* B *on abaisse, sur la bissectrice* OC, *les perpendiculaires* Aa, Bb ; *prenant le point* k *milieu de* OC, *sur la droite* ak *comme diamètre, on construit une demi-circonférence qui est rencontrée en* M *par la droite* Bb; *et l'on demande le lieu géométrique des points* M.

Solution. — La construction fournit immédiatement la relation

$$(1) \qquad \overline{Mb}^2 = ab.kb.$$



Or, à la définition du point k, d'après laquelle ce point est le milieu de la droite CO, nous pouvons facilement substituer une construction géométrique. Car, si l'on mène Ch parallèle au côté AO et terminée au côté BO, et que l'on abaisse du point h une perpendiculaire sur la bissectrice, le pied de cette perpendiculaire sera le milieu de CO, et par suite coïncidera avec le point k.

Cela posé, on a

$$(a) \qquad ab = Cb.\frac{AB}{CB};$$

et au moyen de la *construction* du point k, on trouve aussi

$$(b) \qquad kb = Ob.\frac{Bh}{BO}.$$

Substituant ces valeurs de ab et de kb dans la relation (1), et observant qu'en vertu de la construction

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BO}{Bh}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AB}{CB}.\frac{Bh}{BO} = 1,$$

il vient enfin

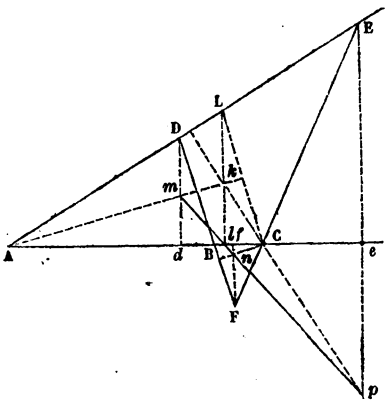
$$(1) \qquad \overline{Mb}^2 = Cb.Ob.$$

Ce qui fait voir que le lieu des points M est la circonférence décrite sur la droite OC comme diamètre.

Scolie. — Les relations précédentes subsisteraient encore et conduiraient par suite au même résultat, si, la droite OC n'étant plus la bissectrice de l'angle O, le point k était toujours défini par la même construction, qui consiste à mener Ch parallèle à OA, et à abaisser hk perpendiculaire sur OC.

DEUXIÈME QUESTION. — THÉORÈME. — *Les quatre côtés d'un quadrilatère, pris trois à trois, forment quatre triangles : construisant le point de rencontre des hauteurs de chacun de ces triangles, on obtient quatre points qui sont en ligne droite.*

Démonstration. — Soient, par exemple, m, n, p les points de rencontre des hauteurs des triangles ABD, BCF, ACE, et cherchons à établir qu'ils sont en ligne droite.



Menons à cet effet la droite CL parallèle à BD, et construisons *auxiliairement* le point de rencontre des hauteurs du triangle ACL; soit k ce point de rencontre.

Appelons d, l, e, f les pieds des hauteurs abaissées sur la droite ABC des sommets D, L, E, F.

On aperçoit immédiatement que les points A, m, k sont en ligne droite, ainsi que les points p, C, k; et que les droites mk et Cn sont parallèles. Il suffira donc, pour démontrer que les points m, n, p sont en ligne droite, d'établir l'égalité

$$(x) \qquad \frac{km}{\mathrm{C}n} = \frac{kp}{\mathrm{C}p}.$$

Or les lignes km et Cn qui sont parallèles, les lignes kp et Cp qui sont des segments d'une même droite, sont entre elles comme leurs projections sur la droite ABC; on a donc les égalités suivantes :

$$\frac{km}{\mathrm{C}n} = \frac{dl}{\mathrm{C}f} \quad \text{et} \quad \frac{kp}{\mathrm{C}p} = \frac{el}{e\mathrm{C}}.$$

Il suffira donc d'établir l'égalité

$$(x') \qquad \frac{dl}{\mathrm{C}f} = \frac{el}{e\mathrm{C}}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{ld}{le} = \frac{\mathrm{C}f}{\mathrm{C}e}.$$

Mais

$$\frac{ld}{le} = \frac{\mathrm{DL}}{\mathrm{LE}}, \quad \frac{\mathrm{C}f}{\mathrm{C}e} = \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CE}};$$

donc l'égalité à démontrer (x') revient à la suivante :

$$(x'') \qquad \frac{\mathrm{DL}}{\mathrm{LE}} = \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CE}},$$

qui résulte immédiatement de la construction, CL ayant été menée parallèlement à BD ou FD. Donc l'égalité primitive (x) est démontrée, et les trois points m, n, p sont en ligne droite, ce qui suffit pour la démonstration du théorème.

5. **TROISIÈME MÉTHODE.** — *Par duplication.* — Cette méthode consiste à faire tourner une portion d'une figure autour d'une certaine droite, pour lui donner, par rapport à l'axe de rotation, une position

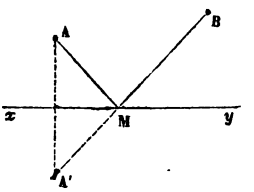
symétrique de celle qu'elle occupait d'abord; opération qu'on exprime plus simplement en langage ordinaire en disant qu'on opère la *duplication* d'une portion de la figure primitive autour de l'une des lignes de cette figure. Or, si la ligne autour de laquelle on a fait la duplication a été convenablement choisie, il arrivera que les éléments linéaires ou angulaires que l'on avait à comparer ne seront pas altérés, et que les relations qu'il fallait mettre en évidence dans la première figure deviendront intuitives, ou au moins d'un plus facile accès, dans la seconde.

On pourra d'ailleurs, dans certains cas, avoir à opérer plusieurs duplications successives autour de différents axes.

APPLICATIONS.

PREMIÈRE QUESTION. — PROBLÈME. — *Trouver le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, en passant par une droite donnée qui laisse d'un même côté les deux points donnés.*

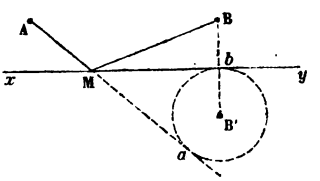
Solution. — Soit AMB un chemin quelconque réunissant les deux points A et B, en passant par un point M de la droite xy.



Opérant la duplication autour de la droite xy de la portion de la figure qui contient les droites issues du point A, le point A viendra en A', symétrique de A par rapport à xy; et le chemin AMB sera remplacé par le chemin *égal* A'MB qui réunit le point déterminé A' au point B et qui traverse la droite xy. Le chemin AMB sera donc minimum quand le chemin *correspondant* A'MB sera minimum, c'est-à-dire quand la ligne A'MB sera droite. Le point cherché M, auquel correspond le chemin minimum AMB, est donc déterminé par l'intersection des droites A'B et xy.

SECONDE QUESTION. — PROBLÈME. — *Étant donnés deux points* A *et* B, *situés d'un même côté d'une droite* xy, *trouver sur celle-ci un point* M *tel, qu'en joignant* AM *et* BM, *l'angle* AMx *soit double de l'angle* BMy.

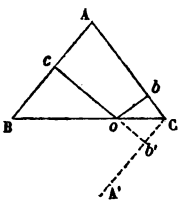
Solution. — Supposons le problème résolu, et opérons la duplication autour de xy de la portion de la figure qui contient BM; le point B viendra en B' symétrique de B par rapport à xy; l'angle B'My égal à BMy sera donc la moitié de l'angle AMx; donc si l'on prolonge AM suivant Ma, la ligne B'M sera la bissectrice de l'angle aMy ou aMb, et le point B' sera également éloigné des deux côtés de cet angle. Donc, si du point B' comme centre et avec un rayon égal à $B'b = \frac{1}{2}B'B$ nous décrivons une circonférence, cette circonférence sera tangente à la droite AMa; donc, récipro-



quement, pour avoir la droite AMa, il suffira de mener du point A une tangente à la circonférence B′, et le point M sera déterminé par l'intersection de cette tangente avec la droite xy.

TROISIÈME QUESTION. — THÉORÈME. — *La somme des distances d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle aux deux côtés de ce triangle est constante, quel que soit le point choisi sur la base.*

Démonstration. — Soit o un point quelconque pris sur la base BC du triangle isocèle ABC; et oc, ob les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés AB, AC. Opérons la duplication autour de la base BC de la portion de la figure qui contient le côté AC et la perpendiculaire correspondante ob; le côté CbA prendra la position symétrique Cb'A′, et la droite $ob' = ob$ sera encore perpendiculaire à Cb'A′. Or on aperçoit immédiatement dans cette nouvelle figure que les droites BA et CA′ sont parallèles; que, par suite, oc et ob' sont sur le prolongement l'une de l'autre, et que la somme $oc + ob'$ est constante et indépendante de la position du point o, puisque cette somme représente la distance des deux parallèles AB, CA′, distance qui reste la même, quelle que soit la perpendiculaire commune aux deux droites AB, CA′ sur laquelle on la mesure. La somme égale $ob + oc$ est donc aussi constante.



Remarque. — La nouvelle figure montre encore la modification qu'il faudrait faire subir à l'énoncé dans le cas où le point o serait choisi sur l'un des prolongements de la base BC.

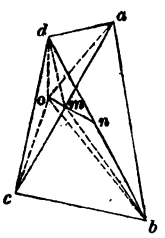
6. **QUATRIÈME MÉTHODE.** — *Par abstraction ou par généralisation.* — On peut en général regarder une vérité géométrique énoncée pour une certaine figure comme un cas particulier d'une autre vérité plus étendue, relative à une figure plus générale que la première, et dans laquelle certains éléments seraient définis par un nombre moindre de conditions que dans la figure de l'énoncé. On pourra donc, dans certains cas spéciaux, faire *abstraction* d'une ou de plusieurs des propriétés qui définissent certains éléments principaux de la figure primitive, pour ne conserver que celles qui paraîtront suffire à l'existence d'une proposition plus générale et dont la proposée ne sera qu'un cas particulier.

Il arrivera souvent, d'ailleurs, que la démonstration de cette proposition générale paraîtra plus facile que celle de la proposition primitive, et c'est ce dont il est facile de se rendre compte : l'une des plus grandes difficultés que l'on éprouve à établir telle propriété d'une figure donnée, réside, en effet, dans le choix que l'on a préalablement à faire des *relations utiles* et dans leur séparation de toutes les autres relations, souvent en nombre considérable, qui existent entre les éléments de la figure, et que l'on n'a pas à employer dans la démonstration de la proposition. Si donc on est parvenu à cette séparation des relations utiles, on aura réellement fait un pas vers la solution de la question proposée.

APPLICATIONS.

THÉORÈME DE NEWTON. — *Dans un quadrilatère circonscrit à un cercle, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle.*

Démonstration. — Soient *abcd* le quadrilatère considéré et *o* le centre du cercle inscrit. Parmi les nombreuses relations qui lient le point *o* au quadrilatère *abcd*, choisissons la suivante :



$$(1) \qquad \text{tri}\, oab + \text{tri}\, ocd = \text{tri}\, obc + \text{tri}\, oda,$$

qui exprime que la somme des aires des triangles ayant pour sommet commun le point *o* et pour bases deux côtés opposés du quadrilatère, est équivalente à la somme des aires des triangles ayant pour bases les deux autres côtés. Or il est facile de démontrer que, dans un quadrilatère *quelconque abcd*, tout point *o* satisfaisant à la relation (1) est situé sur la droite *mn* qui joint les milieux des diagonales.

La relation (1) peut, en effet, s'écrire

$$(1') \qquad \text{tri}\, oab - \text{tri}\, obc = \text{tri}\, oad - \text{tri}\, ocd;$$

et si l'on appelle *m*, *n* les milieux des diagonales *ac*, *bd*, on aperçoit immédiatement que

$$(2) \qquad \text{tri}\, oab - \text{tri}\, obc = 2\,\text{tri}\, omb.$$

Car les triangles qui entrent dans la relation (2) ont une base commune *ob*, et sont, par conséquent, entre eux comme les distances des points *a*, *c*, *m* à la droite *ob*. On aura de même

$$(3) \qquad \text{tri}\, oad - \text{tri}\, ocd = 2\,\text{tri}\, omd.$$

Il suffira donc, pour que le point *o* satisfasse à l'équation de condition (1'), qu'il satisfasse à la suivante :

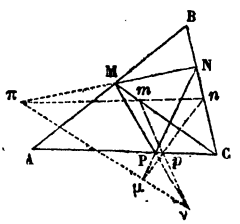
$$(4) \qquad \text{tri}\, omb = \text{tri}\, omd,$$

ce qui exige, les triangles *omb* et *omd* ayant une base commune *om*, que les sommets *b*, *d* soient également éloignés de la droite *om*, ou, ce qui revient au même, que *om* passe par le milieu *n* de la droite *bd*; ou enfin que le point *o* soit situé sur la droite *mn* qui joint les milieux des diagonales. Nous avons donc ce théorème général :

THÉORÈME. — *Dans un quadrilatère plan quelconque, le lieu des points o tels, que des quatre triangles ayant pour sommet commun l'un de ces points, et pour bases respectives les quatre côtés du quadrilatère, la somme de deux triangles non adjacents soit égale à la somme des deux autres, est la droite qui joint les milieux des diagonales.* (Léon ANNE.)

Si le quadrilatère est circonscriptible, le centre du cercle inscrit est évidemment l'un des points du lieu précédent; nous retrouvons ainsi le théorème de Newton dans un cas particulier du précédent.

Scolie. — A la méthode actuelle se rattache encore l'emploi des lieux géométriques ou des courbes enveloppes dans la résolution des problèmes *déterminés,* ayant pour objet de trouver un point (ou une droite) satisfaisant à plusieurs conditions A et B.



En effet, si l'on fait alternativement abstraction de l'une des conditions B ou A, qui définissent le point (ou la droite) que l'on cherche, on trouvera successivement *deux* lieux géométriques (a) et (b) [ou deux courbes enveloppes (α) et (β)] des points (ou des droites) satisfaisant isolément aux conditions A et aux conditions B. Le point ou la droite que l'on cherche sera donc le point commun aux courbes (a) et (b), ou la tangente commune aux courbes (α) et (β).

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'*inscrire dans un triangle donné* ABC *un triangle* MNP *dont les côtés passent par trois points donnés* π, μ, ν, *situés en ligne droite.*

Il suffit évidemment, pour résoudre le problème, de déterminer l'un des sommets M, par exemple, du triangle cherché. Or, d'après l'une des conditions du problème, le sommet M doit se trouver sur le côté AB; et si nous faisons pour un moment abstraction de cette condition, nous aurons, au lieu du triangle *déterminé* MPN, une infinité de triangles, tels que *mpn*, dont les côtés passeront par les points fixes π, μ, ν, et dont les sommets n, p décrivent les côtés CB, CA du triangle ABC. Mais, d'après un théorème connu, le sommet libre m du triangle variable *mnp* décrit une droite passant par le point de concours C des droites CB, CA, qui servent de directrices aux sommets n, p. Le point cherché M sera donc fourni par l'intersection du côté AB avec la droite Cm.

7. **CINQUIÈME MÉTHODE.** — *Par composition et décomposition.* — Cette méthode consiste à composer (soit par voie d'addition, soit par voie de soustraction), avec les grandeurs dont on veut établir l'égalité, d'autres grandeurs auxiliaires dont l'égalité est évidente ou peut être rendue telle; les nouvelles grandeurs qui résultent de cette opération étant alors identiques ou simplement équivalentes.

A cette méthode se rattachent encore les démonstrations où l'on décompose les deux grandeurs considérées en un même nombre (limité ou illimité) de parties que l'on prouve être égales ou équivalentes deux à deux; la méthode prenant alors le nom de méthode par décomposition.

APPLICATIONS.

Les éléments de géométrie présentent plusieurs applications de la méthode actuelle. Nous citerons comme exemple les théorèmes relatifs au

triangle rectangle, et plusieurs propositions relatives à la mesure des solides.

8. **SIXIÈME MÉTHODE.**—*Par les limites.*—Cette méthode est fondée sur la définition même de la *limite* d'une grandeur variable : elle consiste à substituer aux grandeurs A, B, C,..., entre lesquelles on veut établir l'existence d'une certaine relation, des grandeurs variables a, b, c,... ayant pour limites respectives A, B, C,...; cherchant ensuite la relation

$$(x) \qquad f(a, b, c, \ldots) = 0,$$

qui existe entre les grandeurs a, b, c,..., et examinant ce que devient cette relation (x) quand a, b, c,... convergent simultanément vers leurs limites A, B, C,..., on obtiendra enfin la relation

$$(X) \qquad F(A, B, C, \ldots) = 0$$

qu'il s'agissait de trouver.

Remarque. — Les éléments de géométrie présentent un grand nombre d'applications de cette méthode.

9. **SEPTIÈME MÉTHODE.** — *Par la réduction à l'absurde.* — Dans cette méthode on établit entre les grandeurs considérées les relations *affirmées* par l'énoncé, en faisant voir que toute supposition de relations différentes conduirait à des conséquences opposées aux données de la question, ou absurdes en elles-mêmes.

Cette méthode ne doit, au point de vue de l'élégance géométrique, être employée que dans le cas où elle fournit une démonstration plus simple que la méthode analytique ordinaire, et particulièrement pour les cas où celle-ci serait insuffisante; car *il est visible que ces sortes de démonstration peuvent convaincre l'esprit, mais non pas l'éclairer, ce qui doit être cependant le principal fruit de la science.* (Logique de Port-Royal.)

APPLICATIONS.

THÉORÈME. — *Deux polygones circonscriptibles et d'un même nombre de côtés sont égaux si les distances de leurs différents sommets aux centres des cercles inscrits sont égales deux à deux et se succèdent dans le même ordre.*

N. B. Le théorème suppose en outre que chacun des deux polygones enveloppe complétement le cercle inscrit correspondant.

Démonstration. — On aperçoit immédiatement que l'égalité des deux polygones entraîne l'égalité des rayons des cercles inscrits, et que réciproquement, s'il était établi que les rayons des cercles inscrits sont égaux, il en résulterait l'égalité des deux polygones, qui seraient alors composés d'un même nombre de triangles rectangles égaux (comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal) et se succédant dans le même ordre. Il suffira donc d'établir l'égalité des rayons r, r'.

Supposons, à cet effet, que l'on ait

$$r \gtrless r'.$$

Soient ABC...L, A'B'C'...L' les deux polygones; O, O' les centres des cercles inscrits desquels nous abaisserons Oa, Ob,..., Ol et $O'a'$, $O'b'$,..., $O'l'$ perpendiculaires respectives à AB, BC,..., LA et à A'B', B'C',..., L'A'; joignons enfin les centres O et O' aux différents sommets des deux polygones. La comparaison des triangles rectangles AOa, $A'O'a'$, dans lesquels les hypoténuses OA, O'A' sont égales et les côtés Oa, $O'a'$ sont inégaux, montre que les angles AOa, $A'O'a'$ sont inégaux; et d'ailleurs suivant que l'on aura

$$r \gtrless r', \quad \text{c'est-à-dire} \quad Oa \gtrless O'a',$$

on aura

$$A\widehat{O}a \lessgtr A'\widehat{O'}a';$$

on verrait de même que

$$a\widehat{O}B \lessgtr a'\widehat{O'}B';$$

on a donc, en ajoutant,

$$A\widehat{O}B \lessgtr A'\widehat{O'}B';$$

on aurait de même

$$B\widehat{O}C \lessgtr B'\widehat{O'}C',$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$L\widehat{O}A \lessgtr L'\widehat{O'}A'.$$

Par suite, en ajoutant ces inégalités membre à membre, on arriverait à ce résultat, que la somme des angles formés autour du point O serait différente de celle des angles formés autour du point O', conséquence absurde, puisque chacune de ces sommes est égale à quatre droits. Donc on a nécessairement $r = r'$, et le théorème se trouve démontré.

THÉORÈME II. — *Deux polygones inscriptibles et d'un même nombre de côtés sont égaux quand les distances à leurs côtés respectifs des centres des cercles circonscrits sont égales deux à deux et se succèdent dans le même ordre.*

La démonstration est entièrement analogue à la précédente; elle consiste à établir, par la même méthode, l'égalité des rayons des cercles circonscrits. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1848, page 61.)

10. **HUITIÈME MÉTHODE.** — *Par inversion.* — Cette méthode consiste à prendre pour données d'une nouvelle question *auxiliaire* les inconnues de la question proposée, les données de celle-ci devenant les inconnues de la question auxiliaire. Si l'on résout directement cette dernière, on obtiendra une figure semblable à celle que l'on devait construire pour résoudre

le problème proposé, qui n'offrira plus dès lors aucune difficulté. (*Examen des différentes méthodes*, page 16.)

La méthode actuelle pourra être employée avec avantage dans la plupart des problèmes ayant pour objet de construire une figure semblable à une figure connue, et ayant avec une autre figure donnée certaines relations de position spécifiées dans l'énoncé.

On peut d'ailleurs, dans certains cas, diriger la construction du problème inverse de manière à obtenir immédiatement certains éléments principaux suffisant pour déterminer la figure que l'on avait à construire dans le problème primitif. On en verra un exemple dans le second des problèmes suivants.

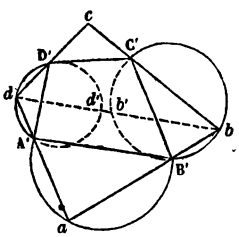
APPLICATIONS.

Nous prendrons, comme application de la méthode, l'exemple choisi par M. Lamé, en modifiant seulement la solution de la question auxiliaire.

Problème I. — *Inscrire à un quadrilatère donné* (Q) *un quadrilatère semblable à un autre quadrilatère donné* (Q').

Solution. — Proposons-nous le problème inverse consistant à *circonscrire à un quadrilatère donné* (Q') *un quadrilatère* (Q) *donné d'espèce.*

Cette question auxiliaire est plus facile à traiter directement, et c'est de sa solution que nous allons nous occuper.



Soit *abcd* le quadrilatère cherché, circonscrit au quadrilatère A'B'C'D' (Q') et semblable au quadrilatère donné (Q).

Les angles $\widehat{d}$, $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ étant donnés, les sommets d, a, b seront respectivement sur des segments capables d'angles connus construits sur les côtés D'A', A'B', B'C'; si, de plus, nous joignons bd qui coupe en $b'd'$ les segments construits sur B'C', D'A', nous reconnaîtrons que nous pouvons déterminer à priori les points b', d'; car le quadrilatère *abcd* étant semblable à un quadrilatère donné (Q), le triangle partiel *abd*, par exemple, est semblable à un triangle donné; les angles *abd*, *adb* sont donc connus; et comme ils ont pour mesures respectives les demi-arcs B'b', A'd', nous pourrons, par une construction simple, obtenir chacun des points b', d'. Cela posé, la droite $b'd'$, joignant ces deux points, ira couper une deuxième fois les segments construits sur B'C' et D'A' suivant les points b, d; nous aurons donc deux sommets opposés b, d du quadrilatère cherché, et le problème auxiliaire sera résolu.

Enfin, si nous revenons au problème primitif, il nous suffira, pour le résoudre, de diviser les côtés du quadrilatère ABCD (Q) dans des rapports égaux aux rapports des segments que les points B', C', D', A' déterminent sur les côtés *ab*, *bc*, *cd*, *da* de la figure précédente, et de joindre les points de division.

Remarque. — Le problème proposé a huit solutions. Car, si nous examinons le nombre des solutions du problème auxiliaire nous trouverons que :

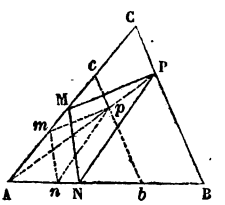
1°. En supposant d'abord que l'angle a s'appuie sur le côté A'B', nous pouvons supposer : *soit* que les angles b et d s'appuient respectivement sur A'D' et sur B'C', ce qui fournit une première solution ; *soit* au contraire que b et d s'appuient respectivement sur B'C' et A'D' comme dans notre figure, ce qui fournit une seconde solution (cette seconde solution rentrerait toutefois dans la première, si l'on avait à la fois $\widehat{b} = \widehat{d}$, et cercle A'$d$D' = cercle C'B'$b'$, c'est-à-dire A'D' = B'C').

2°. On aura de même trois autres systèmes de deux solutions fournis successivement par l'hypothèse que l'angle $\widehat{a}$ s'appuie sur les côtés B'C', C'D', D'A', au lieu de s'appuyer sur le côté A'B'.

Le problème aura donc huit solutions dans le cas général.

Problème II. — *On propose d'inscrire dans un triangle donné un triangle dont les côtés soient parallèles à des directions données.*

Solution. — Construisons un triangle mnp ayant ses côtés parallèles à ceux du triangle cherché, et dont les sommets m, n soient situés sur les côtés AC, AB. On voit immédiatement alors que, si par le sommet p de ce triangle on menait la droite bc parallèle à BC, on obtiendrait une figure Abc, mnp semblable à celle que l'on veut construire, et semblablement placée : ces deux figures ayant d'ailleurs le point A pour centre de similitude, il suffira, pour obtenir le sommet P du triangle cherché, de prolonger la droite Ap jusqu'à son intersection avec le côté BC, et le problème se trouvera résolu.



11. **Neuvième méthode.** — *Par les lignes, les aires ou les volumes auxiliaires.* — Cette méthode consiste à employer comme auxiliaires, dans la recherche d'une relation entre des grandeurs d'une certaine espèce (lignes, aires ou volumes) des grandeurs d'espèce différente (aires, volumes ou lignes) entre lesquelles on pourra mettre en évidence des relations contenant implicitement celles que l'on cherchait à établir entre les grandeurs de la première espèce.

La mesure des aires et des volumes qui permet d'exprimer ces grandeurs par le produit des nombres qui représentent certaines de leurs dimensions linéaires, conduit naturellement à substituer à la comparaison de deux aires ou de deux volumes la comparaison d'un certain nombre de lignes, dont on n'a plus ensuite qu'à composer les rapports.

Cette substitution est, comme on sait, d'un usage très-fréquent dans les éléments, où elle fournit en général des démonstrations beaucoup plus simples que ne le ferait l'étude directe des grandeurs que l'on envisage : c'est ainsi que les théorèmes relatifs aux aires que l'on peut construire sur

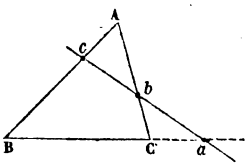
les côtés d'un triangle rectangle, sur la hauteur opposée à l'hypoténuse et sur les segments de celle-ci, se démontrent avec plus de rapidité, en substituant à ces aires les produits de lignes qui les représentent, et en comparant ces lignes entre elles. Dans ce cas et dans la plupart de ceux que présente la géométrie élémentaire, on substitue aux grandeurs à comparer, surfaces ou volumes, des grandeurs plus simples, lignes ou surfaces. Mais il arrive d'autres fois que la recherche de la relation qui existe entre des lignes ou des surfaces présentant des difficultés, on pourra recourir avec avantage à des surfaces ou à des volumes auxiliaires : on aura alors substitué aux grandeurs à comparer, lignes ou surfaces, des grandeurs plus complexes, surfaces ou volumes; et, quoique cette substitution paraisse d'abord contraire à l'élégance géométrique, on ne devra pas cependant l'exclure systématiquement dans les cas surtout où elle conduira plus rapidement que les méthodes directes au but que l'on se propose.

APPLICATIONS.

THÉORÈME I. — *Des six segments qu'une transversale rectiligne détermine sur les côtés d'un triangle, trois segments non adjacents forment un produit égal au produit des trois autres.*

Démonstration. — Ainsi l'on aura

$$(1) \qquad Ac.Ba.Cb = Bc.Ca.Ab.$$



Désignons en effet par A, B, C les aires des triangles que la transversale considérée détermine dans les angles A, B, C du triangle, on aura l'identité.

$$(2) \qquad \frac{A}{B}.\frac{B}{C}.\frac{C}{A} = 1.$$

Mais deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle; on a donc les valeurs suivantes pour chacun des rapports qui entrent dans la formule (2) :

$$\frac{A}{B} = \frac{Ac}{Bc}.\frac{cb}{ca},$$

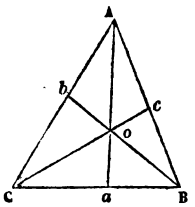
$$\frac{B}{C} = \frac{Ba}{Ca}.\frac{ac}{ab},$$

$$\frac{C}{A} = \frac{Cb}{Ab}.\frac{ba}{bc}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, substituant dans l'identité (2) et simplifiant, on trouve la relation qu'il s'agissait d'établir.

THÉORÈME II. — *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle à un même point déterminent sur les côtés opposés six segments; le produit de trois segments non adjacents est égal au produit des trois autres.*

Démonstration. — Soient ABC le triangle et o le point considérés; désignons par a, a', b, b', c, c', les aires des triangles ayant pour sommet commun le point o et pour bases les différents segments pris dans leur ordre de succession, en faisant le tour du triangle à partir du sommet B dans le sens BCA. On aperçoit immédiatement les relations suivantes :



$$\frac{a}{a'}=\frac{\mathrm{B}a}{\mathrm{C}a},\quad \frac{b}{b'}=\frac{\mathrm{C}b}{\mathrm{A}b},\quad \frac{c}{c'}=\frac{\mathrm{A}c}{\mathrm{B}c};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$(1)\qquad \frac{a.b.c}{a'.b'.c'}=\frac{\mathrm{B}a\,.\,\mathrm{C}b\,.\,\mathrm{A}c}{\mathrm{A}b\,.\,\mathrm{B}c\,.\,\mathrm{C}a}.$$

D'un autre côté, comparant deux à deux les aires a, b, c avec celles des aires a', b', c' qui ont un angle commun avec les premières, on trouve

$$\frac{a}{b'}=\frac{o\mathrm{B}\,.\,oa}{o\mathrm{A}\,.\,ob},\quad \frac{b}{c'}=\frac{o\mathrm{C}\,.\,ob}{o\mathrm{B}\,.\,oc},\quad \frac{c}{a'}=\frac{o\mathrm{A}\,.\,oc}{o\mathrm{C}\,.\,oa}.$$

Donc, en multipliant membre à membre et en simplifiant, il vient

$$(2)\qquad \frac{a.b.c}{a'.b'.c'}=1.$$

Enfin, la comparaison des relations (1) et (2) démontre le théorème énoncé.

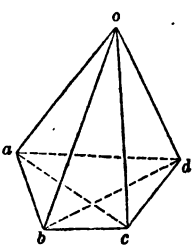
THÉORÈME III. — *Soient o le sommet d'un angle solide d'octaèdre régulier, et a, b, c, d les points suivant lesquels les arêtes issues du point o sont coupées par un plan quelconque; on a cette égalité*

$$\frac{1}{oa}+\frac{1}{oc}=\frac{1}{ob}+\frac{1}{od}.$$

(LÉVY.)

Démonstration. — Menons les diagonales ac, bd du quadrilatère $abcd$; on a l'identité

$$\text{pyram. } oacb+\text{pyram. } oacd=\text{pyram. } obda+\text{pyram. } obdc.$$



D'ailleurs deux quelconques de ces pyramides sont entre elles comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs; et, en choisissant pour bases les triangles aoc ou bod dont les angles en o sont égaux, on verra que les bases sont entre elles comme les rectangles $oa.oc$ et $ob.od$; quant aux hauteurs des quatre pyramides, elles sont entre elles comme les segments ob, od, oa, oc; donc, en divisant les deux membres de l'identité précédente par un même nombre, on aura

$$ob.oa.oc+od.oa.oc=oa.ob.od+oc.ob.od;$$

ou, en divisant chaque terme par le produit, $oa.ob.oc.od$,

$$\frac{1}{oa}+\frac{1}{oc}=\frac{1}{ob}+\frac{1}{od}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1853.)

12. **DIXIÈME MÉTHODE.** — *Par les solides auxiliaires.* — Cette méthode consiste à faire intervenir la géométrie à trois dimensions dans la solution d'une question de géométrie plane. Elle possède en général le précieux avantage de fournir des solutions et démonstrations intuitives des problèmes et théorèmes auxquels on a su l'appliquer : dans cette méthode, en effet, si l'on veut, par exemple, établir une propriété déterminée d'une figure plane, on considère cette figure comme la base d'un édifice dont on règle la construction comme on le veut, sans être arrêté par aucune des exigences ordinaires des données de la question; et, si l'imagination de l'architecte a été heureusement inspirée, il n'a plus qu'à s'élever au-dessus de son œuvre pour apercevoir nettement, dans les harmonies de l'ensemble, les propriétés particulières de la figure qu'il considérait d'abord.

De grands géomètres se sont servis avec avantage de cette élégante méthode : Desargues d'abord, qui l'employait à peu près exclusivement dans ses démonstrations; Pascal, dans la rectification des roulettes (*voir* ci-après le chapitre VI), et Monge dans l'établissement des propriétés des pôles et des polaires pour les courbes du second degré.

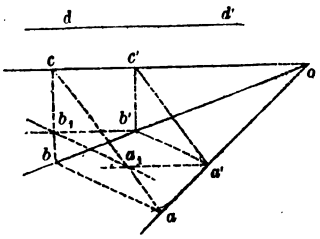
APPLICATIONS.

PREMIÈRE QUESTION. — PROBLÈME. — *Mener, par un point donné c, une droite co allant passer par le point de concours inaccessible de deux droites données ao et bo.*

Solution. — Le problème étant supposé résolu, regardons les droites ao, bo, co comme les projections sur le plan de la figure des arêtes d'un angle solide trièdre O, et concevons que celui-ci soit coupé par deux plans parallèles qui y déterminent deux sections triangulaires à côtés parallèles ABC, A'B'C'. La projection de cette figure auxiliaire sur le plan de la figure primitive se composera des droites ao, bo, co et des triangles abc, $a'b'c'$, dont les côtés de même nom seront parallèles, et dont les sommets a, a'; b, b'; c, c' seront situés deux à deux sur les droites ao, bo, co. Or ceci suffit à la solution du problème : car le triangle abc peut être regardé comme donné; et pour construire le triangle $a'b'c'$, il suffira de tracer dans la portion *accessible* des droites ao, bo, $a'b'$ parallèle à ab; et de mener enfin par a' et b', parallèlement aux droites ac et bc, des droites qui se couperont en c' et détermineront un second point de la droite cherchée $cc'o$.

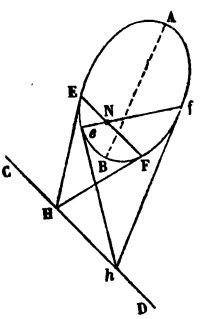
SECONDE QUESTION. — PROBLÈME. — *Mener, parallèlement à une direction donnée dd', une droite co allant passer par le point de concours inaccessible de deux droites données ao, bo.*

Solution. — Imaginons encore un angle trièdre O défini comme précédemment et coupé par les plans parallèles ABC, A'B'C'. Regardons le triangle A'B'C' comme la base supérieure d'un prisme auxiliaire ayant pour arête CC' (qui représente la droite *cc'o* dont la direction est connue); et soit A_1 B_1 C la base inférieure de ce prisme; A_1 B_1 C sera inscrit dans l'angle ACB et sera égal et parallèle à A'B'C'. Si nous passons maintenant de la figure de l'espace à sa projection, nous parviendrons facilement à cette construction : *Tracer dans la partie accessible de l'angle aob les parallèles ab, a'b'; par a' et b', parallèlement à dd', mener les droites indéfinies* $a'a_1$ *et* $b'b_1$ *que l'on coupe par une transversale* a_1b_1 *parallèle à ab; mener enfin les droites* aa_1, bb_1 *qui se coupent en un point c appartenant à la droite cherchée cc'o.* On peut d'ailleurs, si on le veut, obtenir un second point *c'* de la même droite, en achevant la construction du triangle *a'b'c'* parallèle à *abc*.



Troisième question. — Théorème. — *Propriétés des pôles et des polaires dans les coniques.*

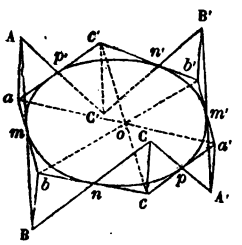
Soient AEBF une section conique quelconque et CD une droite située dans son plan. Concevons que la courbe tourne autour de l'un de ses axes AB, de manière à engendrer une surface de révolution, et concevons les deux plans tangents à cette surface menés par la droite CD; ces plans auront leurs points de contact particuliers C' et D', et la droite C'D' sera perpendiculaire au plan de la courbe AEBF, et rencontrera ce plan en un point *déterminé* N. Cela posé, si l'on conçoit le cône ayant pour sommet un point *quelconque* H de la droite CD et circonscrit à la surface de révolution, il touchera cette surface suivant une courbe passant nécessairement par les deux points C' et D'. Cette courbe, C'...D', sera plane; son plan, qui contiendra la droite $\overline{C'ND'}$ perpendiculaire au plan de la section AEBF, coupera ce dernier suivant une droite EF passant par le point déjà déterminé N, et cette droite EF sera précisément la corde réunissant les points de contact des tangentes menées à la section conique par le point H. On retrouve donc ainsi l'une des propriétés des pôles (N) et des polaires ($\overline{CD}$) dans les courbes du second degré. (*Voir* les *Séances des Écoles normales*, tome II, page 356; Monge.)



Quatrième question. — Théorème de Brianchon.

Soit *abca'b'c'* un hexagone circonscrit à une ellipse (E).

Regardons les côtés de cet hexagone comme les projections, sur le plan de l'ellipse, de *six* génératrices rectilignes d'un hyperboloïde auxiliaire à une nappe dont l'ellipse proposée serait l'ellipse de gorge. Toutefois, comme chacun de ces côtés reçoit la projection de deux génératrices de la surface, nous entendrons que deux côtés consécutifs de l'hexagone reçoivent les projections de deux génératrices de systèmes différents, lesquelles se rencontrent, par conséquent, sur la perpendiculaire au plan de l'ellipse donnée, menée par l'extrémité commune à ces deux côtés.



On aperçoit facilement alors que les six génératrices forment un circuit fermé, ou un hexagone gauche ABCA'B'C'A, et que les côtés opposés de cet hexagone sont deux à deux dans un même plan. Il en résulte que les diagonales AA', BB', CC', qui joignent les sommets opposés de l'hexagone gauche, sont deux à deux dans le même plan.

Or, si l'on supposait un moment que ces diagonales se coupent deux à deux en des points différents, γ, α, β, on en conclurait que les six points A, B, C, A', B', C' sont dans un même plan, ce qui n'est pas; donc les diagonales de l'hexagone gauche se coupent en un même point O; donc il en est de même de leurs projections, c'est-à-dire des diagonales *aa'*, *bb'*, *cc'* de l'hexagone plan *abca'b'c'*. C. Q. F. D.

Scolie. — On démontrerait avec la même facilité et par les mêmes considérations que : *Si dans un polygone de $4m+2$ côtés, circonscrit à une conique, $2m$ diagonales, joignant les sommets opposés, se coupent en un même point o, la dernière diagonale passera aussi par le point o.* La condition que le nombre des sommets du polygone soit de la forme $4m+2$ résulte, dans ce mode de démonstration, de la nécessité que la génératrice initiale et la génératrice extrême soient de systèmes différents et puissent, en se rencontrant, fermer le circuit.

CINQUIÈME QUESTION. — THÉORÈME DE PASCAL.

Le théorème de Pascal se déduit avec la même facilité de la figure précédente.

Observons, en effet, que les plans ABC, A'B'C'; BCA', B'C'A; CA'B', C'AB se coupent deux à deux, suivant trois droites situées dans un même plan P (et ce plan P est déterminé par les trois points $\overline{AB}\cdot\overline{A'B'}$, $\overline{BC}\cdot\overline{B'C'}$, $\overline{CA'}\cdot\overline{C'A}$). Les traces de ces plans sur le plan de l'ellipse de gorge se couperont, par suite, deux à deux, suivant trois points situés en ligne droite (et cette droite sera la trace du plan P sur le plan de l'ellipse de gorge). Or ce résultat démontre le théorème en question, car les traces dont nous parlons sont précisément les côtés opposés d'un hexagone inscrit à l'ellipse de gorge, et dont les sommets coïncident avec les points de contact des côtés de l'hexagone circonscrit *abca'b'c'*.

13. **ONZIÈME MÉTHODE.** — *Par la transformation des figures.* — *Réflexions générales sur l'importance de cette méthode.* — Cette méthode, l'une des plus importantes et des plus fécondes de la géométrie, est certainement celle qui a le plus puissamment servi les géomètres de notre siècle dans leurs efforts pour reculer les bornes de la science de leurs prédécesseurs. Ceux-ci paraissent l'avoir à peu près ignorée, et c'est à peine si quelques-uns l'emploient accidentellement, dans des applications isolées: Cavalleri, par exemple, en faisant naître la parabole du second degré de la spirale d'Archimède par un mode particulier de dérivation qui, n'altérant pas les éléments superficiels correspondants des deux figures, lui permit de déduire de l'expression connue des aires paraboliques celle des aires spirales; Grégoire de Saint-Vincent et Pascal, qui traitèrent le même sujet avec de grands développements; Newton, qui donna, en passant, les formules qui servent de base à la construction des figures homologiques; et Maclaurin, qui appliqua à divers sujets de géométrie et de mécanique la méthode si féconde et si rapide des projections.

Dans notre siècle, au contraire, d'éminents géomètres, parmi lesquels nous citerons MM. Poncelet, Chasles et Ch. Dupin, ont cultivé cette méthode avec une sorte de prédilection. Ainsi chacun connaît les élégantes transformations par lesquelles M. Ch. Dupin (*) est parvenu à une déduction si lumineuse des théorèmes d'Euler et de Monge sur la courbure des surfaces, ainsi que les belles et nombreuses propriétés des courbes et des surfaces du second degré, découvertes par MM. Poncelet (**) et Chasles (***), à l'aide de transformations purement géométriques.

C'est donc de nos jours seulement que cette méthode a réellement pris naissance; et, des fruits qu'elle a déjà portés, des rapprochements inattendus qu'elle établit si fréquemment entre des figures diverses, il est permis de conclure qu'elle constitue la véritable méthode en géométrie, et doit le mieux contribuer à agrandir indéfiniment le champ des vérités géométriques, sans introduire, par ce nombre considérable de vérités nouvelles ajoutées à celles déjà acquises, aucune confusion dans la science. Elle aura, en effet, pour point de départ l'ensemble des vérités simples, élémentaires qui doivent être toujours présentes à l'esprit, et pour instruments les divers modes de transformation déjà découverts et que leur classification permettra d'appliquer à telle figure déterminée que l'on aura à envisager.

Nous allons donner, comme exemple de la méthode actuelle, les principes relatifs à la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques, et leur application à plusieurs propositions de géométrie plane et sphérique.

(*) *Développements de Géométrie.*

(**) *Traité des propriétés projectives.*

(***) Mémoire sur deux principes généraux de la science : *La Dualité et l'Homographie.*

Cette partie de notre travail ne sera pas inutile, si l'on trouve que le nouveau mode d'exposition de la trigonométrie sphérique qu'elle renferme permet d'établir dans un parallélisme plus complet les formules analytiques relatives aux triangles sphériques, et leurs principales propriétés géométriques; car c'est là, ce nous semble, le criterium de l'excellence de telle ou telle méthode appliquée à un problème donné : que la source à laquelle le calcul vient puiser ses formules successives serve en même temps de centre aux investigations de la géométrie.

CHAPITRE II.

De la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

§ I. — Principes généraux relatifs a la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

14. *Définitions des figures réciproques. — Point-origine. — Puissance.* — Deux points m et m' sont dits *réciproques* par rapport à un point o, appelé point *origine*, et suivant une *puissance* P, positive ou négative, lorsqu'ils sont situés sur une même droite passant par le point o et que le produit de leurs distances à ce point est égal à la puissance P.

Si le point m se meut et engendre dans son mouvement une ligne L (ou une surface S), le point m' réciproque du premier, par rapport à une même origine et suivant une même puissance, engendrera une ligne L' (ou une surface S') réciproque de la première.

Enfin si l'on a un système quelconque de points isolés, de lignes et de surfaces formant une figure F, les points, les lignes et les surfaces réciproques, par rapport à une même origine et suivant une même puissance, formeront une figure F' réciproque de la première; et la transformation par laquelle on passe de la première figure à la seconde porte le nom de *transformation par rayons vecteurs réciproques.*

15. *Relation entre la distance de deux points d'une figure et la distance des points correspondants de la figure réciproque.* — Soient mn, $m'n$ les distances de deux points correspondants des deux figures.

De la relation fondamentale

$$om.om' = on.on' = \mathrm{P},$$

on tire

$$\frac{om}{on} = \frac{on'}{om'}.$$

Les triangles omn, $on'm'$ sont donc semblables et fournissent la proportion

$$\frac{mn}{m'n'} = \frac{om}{on'}.$$

De là, en remplaçant om (ou on') par sa valeur $\frac{\mathrm{P}}{on}$ $\left(\text{ou } \frac{\mathrm{P}}{om'}\right)$, il vient

$$(\mathrm{A}) \qquad mn = \frac{m'n'}{om'.on'} \cdot \mathrm{P};$$

ou

$$(A') \qquad m'n' = \frac{mn}{om.on} \cdot P.$$

Ainsi : *La distance entre deux points de l'une des figures est égale à la distance des points correspondants de la seconde, divisée par le produit des rayons vecteurs qui aboutissent à ces derniers points, et multipliée par la puissance.*

16. Théorème I. — *Les angles correspondants sont égaux dans deux figures réciproques.*

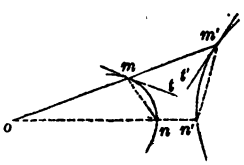
Démonstration. — Lemme. — *Le rayon vecteur qui aboutit à deux points correspondants de deux lignes réciproques, coupe celles-ci sous des angles supplémentaires.*

Menons en effet un rayon onn' voisin du rayon omm', et joignons mn, $m'n'$.

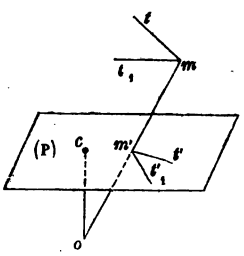
L'égalité fondamentale

$$om.om' = on.on'$$

montre que le quadrilatère $mnn'm'$ est inscriptible, et que, par suite, la somme des angles m et n' est égale à deux droits. D'ailleurs, si l'on suppose que le rayon onn' se rapproche indéfiniment du rayon omm', on voit : 1° que la somme des angles m', n' tend vers deux droits, et, par suite, que les angles variables m, m' tendent vers l'égalité ; 2° que dans ce rapprochement, les cordes correspondantes variables mn, $m'n'$ tendant simultanément vers les tangentes mt, $m't'$ en m, m' aux deux lignes réciproques, les angles m, m' du quadrilatère variable $mnn'm'$ ont pour limites respectives les angles $m'mt$, $mm't'$. Ces derniers sont donc égaux, et *les angles* omt, $om't'$ *sont supplémentaires.*



Cela posé, soient mt, mt_1 les tangentes de deux lignes de la première figure qui se coupent au point m ; et $m't'$, $m't'_1$ les tangentes en m' aux lignes correspondantes de la figure réciproque. Nous supposons d'ailleurs mt et $m't'$, mt_1 et $m't'_1$ (qui sont deux à deux dans un même plan), dirigées de part et d'autre du rayon omm'. Sous cette condition, les trièdres, formés aux points m et m' par les droites mo, mt, mt_1 et $m'o$, $m't'$, $m't'_1$, seront égaux, comme ayant un angle dièdre égal (dièdre suivant om = dièdre suivant om'), compris entre des faces égales (à savoir $\widehat{omt} = \widehat{om't}$ et $\widehat{omt_1} = \widehat{om't'_1}$, ces égalités ayant lieu en vertu du lemme et à cause des directions opposées de mt, $m't'$, de mt_1, $m't'_1$). Les troisièmes faces



sont donc égales, et l'on a

$$\widehat{tmt_1} = \widehat{t'm't'_1}.$$

Ce qui montre d'abord que l'*angle formé par deux lignes d'une figure est égal à l'angle des lignes correspondantes de la figure réciproque.*

Enfin, si dans la figure primitive on a deux surfaces S, S_1, se coupant suivant la courbe mn, et que par l'un de ses points m on mène sur chacune d'elles les lignes ma, ma_1, coupant à angle droit la ligne commune mn, l'angle des lignes ma, ma_1 mesurera l'angle sous lequel se coupent les deux surfaces au point m. Or, d'après ce qui précède, si l'on passe à la figure réciproque, les lignes $m'a'$, $m'a'_1$ (réciproques de ma, ma_1), couperont encore à angle droit la ligne $m'n'$ commune aux deux surfaces réciproques S', S'_1 : l'angle de ces dernières, au point m', sera donc encore mesuré par l'angle des lignes $m'a'$, $m'a'_1$; et comme ce dernier est égal à l'angle des lignes ma, ma_1, on voit en second lieu que : *L'angle de deux surfaces en un point m de leur courbe d'intersection est égal à l'angle des surfaces réciproques au point correspondant m'.*

Corollaire. — *Si l'angle de deux surfaces demeure constant tout le long de leur courbe d'intersection (et si, en particulier, cet angle constant est droit), il en sera de même pour les surfaces réciproques.*

Scolie. — Le principe de la conservation des angles dans deux figures réciproques et la possibilité d'exprimer la distance de deux points quelconques de l'une de ces figures en fonction de distances qui se rapportent uniquement à la seconde, permettent fréquemment de substituer à l'étude de certaines propriétés *métriques* et *descriptives* d'une figure, une étude analogue pour la figure réciproque.

Nous verrons bientôt les avantages spéciaux que présente cette substitution dans l'étude des propriétés des figures sphériques.

17. *Propriétés particulières de deux surfaces réciproques.*

Théorème II. — *Deux surfaces réciproques quelconques jouissent des propriétés suivantes :*

1°. *Toute ligne de courbure de la première surface a pour ligne réciproque une ligne de courbure de la seconde ;*

2°. *Aux lignes de plus grande ou de plus petite courbure de la première* correspondent *les lignes de plus petite ou de plus grande courbure de la seconde ; et par suite à un ombilic de l'une des surfaces correspond un ombilic de l'autre ;*

3°. *Si l'on désigne par r, r' les rayons vecteurs qui aboutissent à deux points réciproques m, m' des deux surfaces ; par ρ, ρ_1 les rayons de courbure des sections principales de la première surface en m ; par ρ', ρ'_1 les rayons de courbure des sections principales* correspondantes *de la seconde surface en m', on aura la relation*

$$(A) \qquad r\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) + r'\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho'_1}\right) = 0;$$

4°. *Enfin, si l'on désigne par* R, R' *les rayons de courbure de deux sections normales correspondantes des deux surfaces, on a, quelles que soient les sections considérées autour des points m, m', la relation*

$$\text{(B)} \qquad \frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = \text{constante.}$$

Observation. — Nous ne nous arrêterons pas à démontrer ces propriétés que nous avons dû énoncer parce qu'elles peuvent être utiles, mais qui ne sont pas essentielles à l'objet que nous avons en vue.

18. Théorème III. — *Une circonférence a pour ligne réciproque, par rapport à l'un quelconque de ses points pris pour origine, une ligne droite perpendiculaire au diamètre origine.*

Corollaire. — *Une sphère a pour surface réciproque, par rapport à l'un quelconque de ses points, pris pour origine, un plan perpendiculaire au diamètre origine.*

Remarque. — Il est peut être inutile d'ajouter que, par inversion, une droite et un plan ont pour réciproques une circonférence et une sphère.

19. Théorème IV. — *Une circonférence a pour ligne réciproque, par rapport à un point quelconque de son plan, pris pour origine, une seconde circonférence.*

Corollaire I. — *Une sphère a pour surface réciproque par rapport à un point quelconque de l'espace, pris pour origine, une seconde sphère.*

Remarque. — Les centres de deux circonférences, ou de deux sphères réciproques, sont sur une même droite passant par l'origine.

Corollaire II. — *La ligne réciproque d'une circonférence par rapport à un point quelconque de l'espace, pris pour origine, est une circonférence.*

Il suffit, pour le démontrer, de regarder la circonférence donnée comme l'intersection de deux sphères auxiliaires S, S_1. Car la ligne réciproque de cette circonférence devant coïncider avec l'intersection des sphères S', S'_1 réciproques des premières, sera elle-même une circonférence. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1854, p. 238.)

20. *Nouvelles définitions. — Relations entre une figure sphérique et sa projection stéréographique.*

On sait que l'on appelle *projection stéréographique* d'une figure sphérique, la projection (ou perspective) de cette figure que l'on obtient en prenant pour centre de projection (ou point de vue) un point de la sphère, et pour plan de projection (ou plan du tableau) le plan diamétral perpendiculaire au rayon qui aboutit au centre de projection.

Or, de cette définition et du corollaire du théorème III, il résulte que la transformée, par rayons vecteurs réciproques, d'une figure sphérique coïncide avec sa projection stéréographique lorsque, l'*origine* des rayons vecteurs coïncidant avec le point de vue, on suppose la *puissance* égale à deux fois le carré du rayon de la sphère.

La transformation des figures sphériques par projection stéréographi-

que étant dès lors un cas particulier de la transformation par rayons vecteurs réciproques, on peut, en réunissant les résultats précédents, énoncer ce théorème :

THÉORÈME V. — *Étant données une figure sphérique et sa projection stéréographique :*

1°. *On peut exprimer* (d'après la formule (A') du n° 15, page 22), *la distance entre deux points quelconques de la figure projetée, en fonction de distances prises uniquement dans la figure sphérique ;*

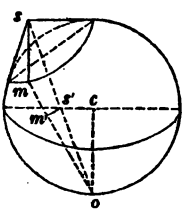
2°. *Les angles* correspondants *des deux figures sont égaux ;*

3°. *Un cercle de la figure sphérique a pour projection stéréographique un cercle ;*

4°. *Enfin, le centre du cercle projection coïncide avec la projection du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle primitif.*

Cette dernière remarque, que l'on doit à M. Chasles, constitue un théorème important par ses nombreuses applications ; pour cette raison, nous en donnerons deux démonstrations, l'une plus élémentaire, et l'autre déduite du corollaire du théorème I.

Première démonstration. — Soient sm une génératrice du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle considéré ; s' et m' les projections du sommet du cône et du point m du cercle suivant le centre de projection stéréographique o ; joignons $s'm'$. D'après le lemme du théorème I (ou par une démonstration directe fort simple), ms étant tangente à la sphère, le rayon vecteur $om'm$ coupe, sous des angles supplémentaires, la tangente ms et sa projection $m's'$. Les triangles $om's'$, oms ont donc l'angle commun o et les angles en m' et m supplémentaires : par suite (d'après un théorème qui manque dans les éléments de géométrie), les côtés de ces triangles, opposés aux angles égaux et supplémentaires, sont proportionnels, et l'on a



$$\frac{s'm'}{sm} = \frac{os'}{os}, \quad \text{d'où} \quad s'm' = sm \cdot \frac{os'}{os};$$

et comme la génératrice du cône sm conserve une valeur constante, que os', os sont des grandeurs fixes, on voit que le point m', projection du point m, décrit une circonférence dont le centre est s', projection du point s.

Seconde démonstration. — Imaginons une sphère auxiliaire S_1 ayant pour centre le sommet s du cône circonscrit à la sphère S suivant le cercle considéré, et passant par ce cercle. Celui-ci sera dès lors l'intersection des deux sphères *orthogonales* S, S_1. Or, si l'on forme la figure réciproque par rapport au point o de la sphère S, celle-ci se transforme suivant le plan diamétral de projection P, et la sphère S_1 est remplacée par une sphère S'_1, dont le centre est quelque part sur le rayon os, et qui est d'ailleurs coupée orthogonalement par le plan P (corollaire du théo-

rème I). Cette dernière circonstance exige que le centre de la sphère S'_1 soit situé dans le plan P, et coïncide par conséquent avec le point s' projection du sommet s. Le cercle primitif, intersection des sphères S, S_1, a donc pour réciproque le grand cercle déterminé dans la sphère S'_1 par le plan P; et celui-ci a pour centre le centre même de la sphère S'_1, c'est-à-dire le point s', projection du sommet du cône circonscrit.

COROLLAIRE. — *Étant donnés un cercle* C *et un point intérieur o, on peut toujours* (*et d'une infinité de manières d'ailleurs*) *le projeter centralement suivant un cercle* C' *qui ait pour centre le point o', projection du point donné o.*

Il suffit, en effet, pour satisfaire à cette double condition, de faire passer une sphère quelconque par le cercle donné, et de former ensuite la projection stéréographique de ce dernier, en prenant pour point de vue l'un des deux points d'intersection de la sphère avec la droite qui joint le point donné o, au sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle donné.

Observation. — Le mode de tranformation par rayons vecteurs réciproques, employé d'abord par M. W. Thomson, sous le nom de *principe des images*, a été étudié par M. Liouville dans un beau Mémoire que l'on trouve dans le *Journal de Mathématiques*, tome XII, page 275.

§ II. — APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS A DIVERSES PROPOSITIONS DE GÉOMÉTRIE PLANE.

21. *Transformation des propriétés descriptives des figures planes composées de lignes droites ou circulaires.*

La figure réciproque d'un polygone rectiligne *abc*... par rapport à un point quelconque o de son plan, est un polygone curviligne $a'b'c'$..., formé par des arcs de cercle qui se croisent au point o: de cette remarque et du principe de l'égalité des angles dans deux figures réciproques, on déduit les propositions suivantes :

1°. *La somme des angles d'un polygone circulaire o, a'b'c'..., est égal à autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone.*

2°. *Dans un triangle circulaire o, a'b'c', si l'on mène par le point o et par chaque sommet un arc de cercle, divisant en deux parties égales l'angle en ce sommet,* ou *perpendiculaire au côté circulaire opposé, les trois arcs* hauteurs, ou *les trois arcs* bissecteurs *ainsi obtenus, se couperont suivant les deux mêmes points.*

3°. *Le lieu géométrique du second point d'intersection de deux circonférences qui passent respectivement par les points fixes o et* A, *o et* B, *et qui se coupent sous un angle constant, est une circonférence.*

Soit une figure plane composée de trois cercles qui se coupent deux à deux : on sait que les cordes communes à ces circonférences, prises deux à deux, se coupent en un même point. Si l'on forme la figure réciproque on obtient ce théorème :

4°. *Etant données trois circonférences situées dans le même plan, si, par un même point o, et par les points d'intersection de deux quelcon-*

ques d'entre elles, on fait passer un cercle, les trois nouvelles circonférences ainsi obtenues se couperont suivant les deux mêmes points.

Soit la figure formée par les différentes normales d'une circonférence, qui passent toutes par le centre c. Formons la figure réciproque par rapport à un point quelconque, o, du même plan. Si l'on désigne par a et b les extrémités du diamètre oc; par a', b', c' les réciproques de a, b, c, par rapport au point o, on verra facilement que le point c' est conjugué harmonique du point o, par rapport aux extrémités a' et b' du diamètre $\overline{ob'c'a'}$ de la circonférence réciproque. Car la relation

$$ca = cb$$

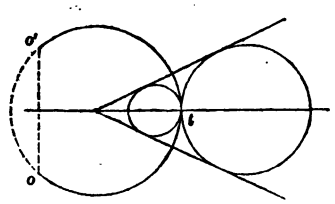
de la figure primitive entraîne la suivante dans la figure réciproque :

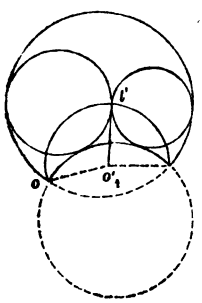
$$\frac{c'a'}{oc'.oa'} = \frac{c'b'}{oc'.ob'} \quad \text{ou} \quad \frac{c'a'}{o'a'} = \frac{c'b'}{o'b'};$$

on aura donc ce théorème :

5°. *Les circonférences passant par un point fixe o, et coupant orthogonalement une circonférence donnée, se coupent suivant les deux mêmes points o et o', conjugués harmoniques par rapport aux extrémités du diamètre que la droite oo' détermine dans la circonférence donnée.*

Considérons encore un angle fixe et tous les systèmes de deux circonférences tangentes entre elles et inscrites dans cet angle : le lieu des points du contact t de ces circonférences est évidemment la bissectrice de l'angle considéré; et si, en outre, on mène, par un point fixe o, une circonférence tangente en t aux deux circonférences de l'un des systèmes, toutes les circonférences ainsi obtenues passeront évidemment par un point fixe o' (symétrique du point o par rapport à la bissectrice de l'angle). Cela posé, la figure réciproque fournit ce théorème :





6°. *Si dans l'espace compris entre deux arcs de cercles qui se coupent, on inscrit une infinité de systèmes de deux cercles tangents entre eux, le lieu géométrique de leur point de contact est un arc de cercle, et l'enveloppe de leur tangente commune se réduit à un point.*

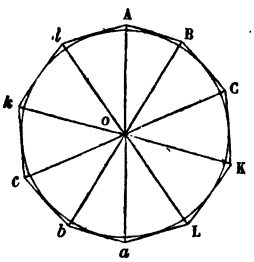
Proposons-nous enfin, comme application du corollaire du théorème V (page 26), de démontrer cette proposition :

7°. *Un polygone de $4m + 2$ côtés circonscrit à un cercle, présentant $2m + 1$ diagonales qui réunissent les sommets opposés, si $2m$ de ces dia-*

gonales concourent en un même point, la dernière diagonale passera elle-même par le point de concours de toutes les autres.

Il suffirait évidemment, pour établir cette proposition, de faire voir que l'on peut projeter la figure considérée de telle façon, que la projection de la dernière diagonale passe par le point O, commun aux projections de toutes les autres. Donc, en vertu du principe contenu dans le corollaire du théorème V (page 26), il suffira d'établir le théorème énoncé pour le cas où le point d'intersection O des $2m$ diagonales concourantes coïncide avec le centre du cercle inscrit au polygone.

Soit donc ABC... KL abc... kl, un polygone circonscrit d'un nombre pair de côtés (nous n'ajoutons pas que ce nombre pair est de la forme $4m+2$, la démonstration que nous allons donner devant nous conduire d'elle-même à cette condition), et dans lequel les diagonales Bb, Cc,..., Kk, Ll, passent par le centre O du cercle inscrit : joignons AO, aO, et établissons que la somme des angles formés d'un côté de la ligne AOa est égale à la somme des angles formés de l'autre côté de cette ligne ; ou, si l'on désigne en général par F l'angle formé par la droite OF avec le rayon qui aboutit au point de contact de l'une des tangentes issues du sommet F, démontrons l'égalité



$$A+2B+2C+\ldots+2K+2L+a=a+2b+2c+\ldots+2K+2l+A;$$

ou, en simplifiant, l'égalité

$$(x)\qquad B+C+D+\ldots+H+K+L=b+c+d+\ldots+h+k+l.$$

Or, les lignes BOb,..., LOl étant droites, on a les égalités

$$(A)\qquad BOC=bOc,\quad DOE=dOe,\ldots,\quad KOL=kOl;$$

ou, en remplaçant chacun de ces angles, tels que DOE, par sa valeur, D + E,

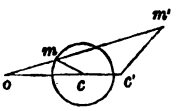
$$(B)\qquad \begin{cases} B+C=b+c, \\ D+E=d+e, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ K+L=k+l. \end{cases}$$

Ajoutant toutes ces égalités membre à membre, on trouve l'égalité (x), et le théorème se trouve démontré.

Remarque. — Pour que la combinaison des relations (B) entraîne l'égalité (x), il faut et il suffit que les angles qui entrent dans les relations (B) soient tous différents ; et, par suite, que les angles entre lesquels existent les relations (A) n'aient aucun côté commun. D'où l'on voit que si le nombre des égalités (A) est m, les rayons OB, OC,..., OK, OL seront

au nombre de $2m$; les sommets B, C,..., K, L, b, c,..., k, l seront donc au nombre de $4m$; et en tenant compte des sommets A, a, on voit que le polygone doit avoir $4m+2$ sommets pour que la démonstration précédente réussisse.

22. *Transformation des propriétés métriques.* — Dans un plan, le lieu géométrique des points m également éloignés d'un point fixe c, est par définition une circonférence. Formant la figure réciproque par rapport à un point o du même plan, et désignant par m' et c' les réciproques des points m et c, on aura, d'après la formule (A) du n° 15 (page 21),



$$mc = \frac{m'c'}{om'.oc'}\,\mathrm{P},$$

et l'on voit que le rapport $\frac{c'm'}{om'}$ demeurera constant. Donc

1. *Le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes ont un rapport constant, est une circonférence.*

Soient trois points en ligne droite et se succédant dans l'ordre a, b, c; on a, entre les distances de ces points, la relation évidente

$$(1) \qquad ac = ab + bc.$$

Formant la figure réciproque, par rapport à un point extérieur o, on obtient un quadrilatère inscriptible $oa'b'c'$, et la relation (1) est remplacée par celle-ci :

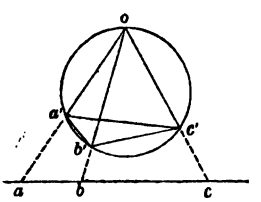
$$(1') \qquad \frac{a'c'}{oa'.oc'} = \frac{a'b'}{oa'.ob'} + \frac{b'c'}{ob'.oc'},$$

qu'on peut écrire

$$(2) \qquad a'c'.ob' = oa'.b'c' + oc'.a'b'.$$

Ainsi :

2. *Dans un quadrilatère inscrit à une circonférence, le rectangle des diagonales est équivalent à la somme des rectangles des côtés opposés.*



3. *Réciproquement, si un quadrilatère présente cette propriété, ses sommets o, a', b', c' appartiennent à une même circonférence.*

Car la relation (2), ou ce qui revient au même, la relation (1'), ayant lieu entre les distances mutuelles des quatre sommets o, a', b', c' du quadrilatère considéré, si l'on construit les points a, b, c réciproques de a', b', c' par rapport au point o, on aura, entre les distances de ces nouveaux points, la relation (1),

$$ac = ab + bc.$$

Les points a, b, c sont donc en ligne droite; et, par suite, les points a', b', c' appartiennent à une circonférence passant par le point o, et le quadrilatère $oa'b'c'$ est inscriptible. C. Q. F. D.

Entre les distances mutuelles des points a, b, c en ligne droite et leurs distances à un point extérieur o, existe la relation connue

$$\overline{oa}^2 . bc + \overline{oc}^2 . ab = \overline{ob}^2 . ac + ab . bc . ac.$$

Si l'on forme la figure réciproque par rapport au point o lui-même, on retrouve le théorème qui donne l'expression du rapport des diagonales dans un quadrilatère inscrit.

Considérons enfin un nombre quelconque de points en ligne droite $a, b, c, \ldots, k, l$; ils fournissent la relation

$$ab + bc + \ldots + kl = al.$$

Formant la figure réciproque par rapport à un point extérieur o, et transformant la relation qui précède, on obtient ce théorème :

4. *Si l'on a un nombre quelconque de points situés sur une même circonférence et se succédant dans l'ordre $o, a, b, c, \ldots, k, l$, entre les distances mutuelles de ces points existe la relation*

$$\frac{ab}{oa . ob} + \frac{bc}{ob . oc} + \ldots + \frac{kl}{ok . ol} = \frac{al}{oa . ol}.$$

Si le polygone ayant pour sommets les points $a, b, c, \ldots, k, l$ devient régulier, la relation se simplifie et l'on a ce théorème :

5. *Si $abc \ldots kl$ est un polygone régulier et o un point du cercle circonscrit compris entre les sommets a et l, on a la relation*

$$\frac{1}{oa . ob} + \frac{1}{ob . oc} + \ldots + \frac{1}{ok . ol} = \frac{1}{oa . ol}.$$

Scolie. — Les théorèmes généraux de M. Chasles sur des systèmes de points situés en ligne droite (*Géométrie supérieure*, page 229) fourniraient, par des transformations analogues, des théorèmes correspondants sur des systèmes de points appartenant à une même circonférence.

§ III. — Application a la trigonométrie sphérique.

23. *Énoncé de diverses propriétés des triangles sphériques, et conséquences de ces propriétés.* — Les triangles sphériques jouissent de nombreuses propriétés analogues à celles des triangles rectilignes. Ainsi : *Les trois arcs de grand cercle menés par les milieux des côtés perpendiculairement à ces côtés, se coupent suivant les deux mêmes points, extrémités d'un diamètre de la sphère; il en est de même des arcs joignant chaque sommet au milieu du côté opposé, des arcs passant par chaque sommet et perpendiculaires au côté opposé, et enfin des arcs qui divisent en deux parties égales les angles du triangle.*

Les démonstrations que l'on connaît de ces propositions sont très-simples (*), et il n'y aurait pas avantage à leur en substituer d'autres que l'on pourrait sans doute déduire des principes précédents. Nous ferons d'ailleurs en passant cette remarque, que *toute propriété descriptive d'un triangle sphérique fournit immédiatement une propriété analogue pour un système de trois circonférences qui se coupent deux à deux dans le même plan.*

Ainsi, par exemple, de ce que les trois arcs *hauteurs* d'un triangle sphérique se coupent suivant les deux mêmes points, il résulte que *trois circonférences se coupant deux à deux dans le même plan, si, par les points communs à deux d'entre elles, on mène une circonférence coupant orthogonalement la troisième, les trois nouvelles circonférences ainsi obtenues se couperont suivant les deux mêmes points.* (PLUCKER.)

Il suffit en effet, pour parvenir à ce théorème, de joindre au principe rappelé plus haut cette observation, que *trois circonférences qui se coupent deux à deux dans le même plan, peuvent être considérées comme les projections stéréographiques des trois côtés d'un triangle sphérique.*

24. *Démonstration du théorème de Lexell. — Énoncé d'un théorème de M. Steiner. — Construction du demi-excès sphérique.*

THÉORÈME DE LEXELL. — *Le lieu géométrique des sommets des triangles sphériques de même base et de surfaces équivalentes, est un petit cercle de la sphère, passant par les points diamétralement opposés aux extrémités de la base.*

Démonstration. — Soient ABC l'un des triangles que nous avons à considérer, et

$$(1) \qquad 2E = A + B + C - 2^{dr}$$

l'excès sphérique *donné* mesurant l'aire de ce triangle. Soient a le centre de la sphère, A′ et B′ les points diamétralement opposés aux extrémités de la base *donnée* AB; et formons la projection stéréographique de la figure en prenant pour centre de projection le point A′. Le triangle ABC a pour projection un triangle abc dont les côtés ab et ac sont rectilignes, le premier étant fixe et le second mobile autour du centre a. Le troisième côté bc est un arc de cercle passant par les points fixes b et b', projections des points B, B′. D'ailleurs si l'on mène les droites bt, ct tangentes en b, c à l'arc bcb', les angles en a, b, c du quadrilatère rectiligne $abct$, étant respectivement égaux aux angles A, B, C du triangle sphérique, on aura, en désignant par $\widehat{t}$ l'angle btc,

$$A + B + C + \widehat{t} = 4^{dr}, \quad \text{ou} \quad A + B + C - 2^{dr} = 2^{dr} - \widehat{t};$$

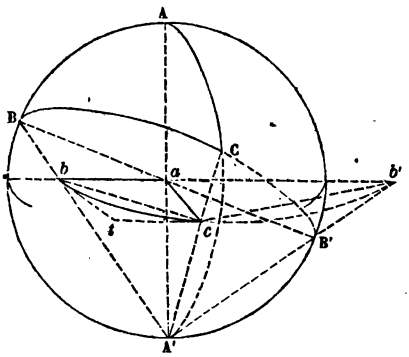
(*) *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, de LA FRÉMOIRE et CATALAN; 2e édition, pages 215 et suivantes.

et de là, en vertu de la relation donnée (1),

$$2E = 2^{dr} - \widehat{t},$$

ou

$$(2) \qquad \widehat{t} = 2^{dr} - 2E.$$



Or, si l'on mène la corde $b'c$, et que l'on désigne par $\widehat{b'}$ l'angle inscrit $bb'c$, on verra : 1° que l'angle $\widehat{t}$ a pour mesure 180 degrés *moins* l'arc bc évalué en degrés; 2° que ce dernier arc mesure le double de l'angle $\widehat{b'}$, et que, par suite, on a l'égalité

$$(3) \qquad t = 2^{dr} - 2\widehat{b'}.$$

La comparaison des relations (2) et (3) montre donc que *le demi-excès sphérique* E *est mesuré dans la projection par l'angle* $\widehat{b'}$ *ou* $b\widehat{b'}c$: cet angle est donc constant, et comme le côté $b'b$ est fixe, ainsi que le sommet b', on voit que, dans la projection, le lieu géométrique des sommets c des triangles abc est une ligne droite passant par le point b'. Donc, en revenant à la figure primitive, on voit que le lieu géométrique des sommets C des triangles ABC, est la courbe déterminée dans la sphère par le plan mené par le point A' et par la droite $b'c$, c'est-à-dire un petit cercle de la sphère passant par les points A' et B'. C. Q. F. D.

Corollaire I. — Du théorème précédent M. Steiner a déduit cette nouvelle propriété des triangles sphériques :

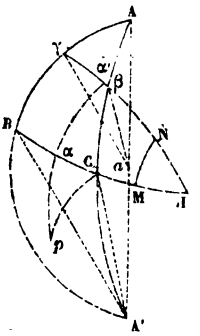
Les trois arcs de grand cercle passant par chaque sommet et divisant l'aire du triangle en deux parties équivalentes, se coupent suivant les deux mêmes points.

Corollaire II. — Dans la figure projetée, l'angle inscrit $b\widehat{b'}c$ qui mesure le demi-excès sphérique E, est égal à l'angle cbt, c'est-à-dire à l'angle sous lequel la droite bc coupe la circonférence bcb'. Il en résulte que le demi-excès est mesuré, sur la sphère, par l'angle du grand cercle BC avec le petit cercle déterminé par les trois points B, C et A'.

Cela posé, menons le grand cercle $\gamma\beta$I, passant par les milieux des côtés AB, AC et coupant en I le côté opposé BC; traçons le grand cercle $\alpha'\alpha p$ perpendiculaire au côté BC en son milieu α, et soit, sur ce grand cercle, p le pôle du petit cercle A'BC. Les rayons $a\gamma$, $a\beta$ de la sphère étant respectivement parallèles aux cordes A'B, A'C, le point p est aussi le pôle du grand cercle $\gamma\beta$I. Il résulte de là : 1° que les arcs $p\alpha$, $\alpha\alpha'$ sont complé-

mentaires; 2° que les angles α, α' étant droits, les arcs $I\alpha$, $I\alpha'$ sont des quadrants, et que, par suite, l'angle I est mesuré par l'arc $\alpha\alpha'$.

Or, si l'on mène maintenant l'arc de grand cercle pC, le triangle $p\alpha C$, rectangle en α et dans lequel l'angle en C est le complément du demi-excès, fournira cette relation :



$$\sin C\alpha = \operatorname{tang} p\alpha . \operatorname{cotang} \alpha C p;$$

ou

$$\sin \frac{a}{2} = \operatorname{cotang} \alpha\alpha' . \operatorname{tang} E,$$

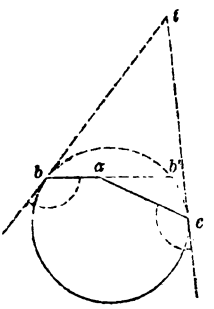
ou enfin

$$\sin \frac{a}{2} = \operatorname{tang} E . \operatorname{cotang} I.$$

Cette formule démontre la construction suivante donnée par M. le professeur Gudermann :

Prendre sur le côté BC, *à partir du point* I, *l'arc* IM *égal à la moitié du côté* BC, *et mener par le point* M *le grand cercle* MN *perpendiculaire à* IM *et terminé à l'arc* $I\beta\gamma$; l'arc MN ainsi obtenu mesure le demi-excès sphérique.

Scolie. — Si la somme des angles du triangle ABC surpasse 4 droits, le point de concours t des tangentes en b et c sera situé du côté opposé à celui où se mesurent les angles de la figure projetée, qui sont égaux aux angles B et C du triangle; toutefois les mêmes conclusions subsisteront encore. En effet, la somme des angles *intérieurs* du quadrilatère $abtc$, qui présente alors un angle rentrant en a, est encore égale à 4 droits; on a donc, en observant que les angles en a, b et c du quadrilatère ont pour valeurs $4^{dr} - A$, $2^{dr} - B$ et $2^{dr} - C$, la relation



$$\hat{t} + (4^{dr} - A) + (2^{dr} - B) + (2^{dr} - C) = 4^{dr},$$

ou

$$(2') \qquad \hat{t} = 2E - 2^{dr}.$$

On trouve facilement d'ailleurs

$$(3') \qquad \hat{t} = 2\hat{b'} - 2^{dr}.$$

Et l'on voit, comme précédemment, que l'angle $\hat{b'}$ ou $ab'c$ est égal au demi-excès sphérique.

Il résulte de cette discussion le corollaire suivant, essentiel pour les applications que nous avons encore à exposer :

Si l'on considère un triangle sphérique ABC *et le triangle rectiligne* abc,

dont les sommets sont les projections stéréographiques (suivant le centre de projection A' *diamétralement opposé au sommet* A) *des sommets du premier, les angles en* a, b, c *du triangle rectiligne auront respectivement pour valeurs* A, B — E, C — E, E *désignant le demi-excès sphérique.*

Quant aux angles en a, b' et c du triangle $ab'c$, que nous aurons aussi à considérer dans ce qui suit, ils ont évidemment pour valeurs 2^{dr} — A, E, et A — E.

25. *Établissement des diverses formules de la trigonométrie sphérique.*

o. *Relations entre les éléments des triangles* ABC *et* abc; ABC *et* $ab'c$.

Nous désignerons comme à l'ordinaire par a, b, c les côtés du triangle sphérique ABC; et, quand nous aurons à les employer, par $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$, $\widehat{a}$, $\widehat{b'}$, $\widehat{c}$ les angles des triangles rectilignes abc, $ab'c$ dont nous avons donné les valeurs en fonction de A, B, C, E. Cela posé, si l'on prend le rayon R de la sphère pour unité de longueur, l'inspection de la figure de la page 32 nous donne immédiatement :

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{ll} ab = \operatorname{tang}\frac{c}{2}, & ac = \operatorname{tang}\frac{b}{2}; \\ ab' = \operatorname{cotang}\frac{c}{2}, & ac' = \operatorname{cotang}\frac{b}{2}; \\ \text{et, par suite,} & \\ bb' = \frac{2}{\sin c}, & cc' = \frac{2}{\sin b}; \end{array}\right.$$

cc' désignant la corde que $\overline{ca}$ prolongée détermine dans la circonférence bcb'.

Enfin la formule (A') du n° 15 (page 22), dans laquelle nous devrons remplacer la puissance P par $2R^2$ ou 2, nous donnera

$$(B)\quad \left\{\begin{array}{l} bc = \overline{BC}\,\dfrac{2}{\overline{A'B}\,.\,\overline{A'C}} = \dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}, \\[2ex] b'c = \overline{B'C}\,\dfrac{2}{\overline{AB'}\,.\,\overline{A'C}} = \dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}. \end{array}\right.$$

Il est sans doute inutile d'ajouter que ces formules ne doivent pas être retenues, et qu'il suffit d'apprendre à les *lire* rapidement sur la figure.

1. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

On a, dans le triangle rectiligne abc,

$$(1)\qquad \overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2ab.ac\cos A;$$

Remplaçant chaque ligne par sa valeur, réduisant au même dénominateur et supprimant le dénominateur commun, il vient

$$\sin^2\frac{a}{2} = \sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2} + \sin^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{b}{2} - \frac{\sin b \sin c}{2}\cos A.$$

Multipliant par 2, changeant les signes, ajoutant 1 aux deux membres et remplaçant $\cos^2\frac{b}{2}$, $\cos^2\frac{c}{2}$, par $1-\sin^2\frac{b}{2}$, $1-\sin^2\frac{c}{2}$, il vient

$$\cos a = \left(1 - 2\sin^2\frac{b}{2}\right)\left(1 - 2\sin^2\frac{c}{2}\right) + \sin b \sin c \cos A,$$

ou enfin

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos a. \quad (\mathrm{I})$$

Remarque. — La construction sur laquelle repose la démonstration précédente, ne comporte d'autres restrictions que celles qui sont nécessaires pour la construction des points b, c. Or ces points pourront toujours être construits comme nous l'avons supposé dans la figure, quand les angles AA'B, AA'C seront moindres que 1 droit, c'est-à-dire quand les arcs c, b, qui mesurent les doubles de ces angles, seront moindres que 180 degrés; ce qui a toujours lieu dans les triangles sphériques que l'on considère.

2. $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{\sin b}{\sin c}$.

Désignons par r le rayon du cercle bcb', qui est coupé en un second point c' par la droite ac prolongée. On sait que, dans un cercle, une corde quelconque est égale au diamètre multiplié par le sinus de l'angle formé par la corde avec la tangente menée par l'une de ses extrémités. Appliquant cette remarque à chacune des cordes bb', cc', on a

$$2r = \frac{bb'}{\sin B} = \frac{cc'}{\sin C}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{bb'}{cc'};$$

et, en remplaçant bb' et cc' par leurs valeurs,

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c}. \quad (\mathrm{II})$$

3. $\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A.$ (III)

4. $\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$ (IV)

La méthode analytique ordinaire permet de passer des formules établies dans les n°s 1 et 2 à la formule (III); et la considération du triangle supplémentaire permet de déduire la formule (IV) de celle du n° 1.

5. *Formules de Delambre.*

On sait que, dans un triangle rectiligne dont les côtés sont a_1, b_1, c_1, et les angles opposés A_1, B_1, C_1, on a pour chaque côté la double relation

$$a_1 = \frac{(b_1 + c_1)\sin A_1}{\sin B_1 + \sin C_1} = \frac{(b_1 - c_1)\sin A_1}{\sin B_1 - \sin C_1},$$

ou, en simplifiant,

$$(A)\qquad a_1 = \frac{(b_1+c_1)\sin\frac{A_1}{2}}{\cos\frac{B_1-C_1}{2}} = \frac{(b_1-c_1)\cos\frac{A_1}{2}}{\sin\frac{B_1-C_1}{2}}.$$

Or, appliquons *en premier lieu* cette double relation au côté bc du triangle rectiligne abc, on aura

$$a_1 = bc = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},\quad b_1 \pm c_1 = ac \pm ab = \operatorname{tang}\frac{b}{2} \pm \operatorname{tang}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{b\pm c}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}};$$

$$B_1 - C_1 = \widehat{b} - \widehat{c} = (B-E)-(C-E) = B-C;\quad A_1 = \widehat{a} = A.$$

En substituant ces valeurs dans (A) et simplifiant, il vient

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.\quad (V)$$

Appliquons *en second lieu* les mêmes relations (A) au côté $b'c$ du triangle rectiligne $ab'c$, on aura

$$a_1 = b'c = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}},$$

$$b_1 \pm c_1 = ac \pm ab' = \operatorname{tang}\frac{b}{2} \pm \cot\frac{c}{2} = \frac{\pm\cos\left(\frac{b\mp c}{2}\right)}{\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}},$$

$$B_1 - C_1 = \widehat{b'} - \widehat{c} = E-(A-E) = 2E - A = B + C - 2^{dr},$$

par suite,

$$\frac{B_1-C_1}{2} = -\left(1^{dr} - \frac{B+C}{2}\right);$$

d'ailleurs

$$\frac{A_1}{2} = 1^{dr} - \frac{A}{2}.$$

Substituant ces valeurs dans (A), et simplifiant, il vient

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}.\quad (V')$$

Les formules (V) et (V') sont les quatre formules découvertes par Delambre.

6. *Analogies de Néper.*

On pourrait, en suivant la marche ordinaire, déduire ces analogies de la combinaison des relations précédentes. Mais comme, en général, on n'établit les formules de Delambre que dans le but d'arriver, par leur secours, aux analogies de Néper, il paraîtra sans doute préférable d'établir ces dernières directement, ainsi qu'il suit :

1°. Le triangle rectiligne *abc* nous donne cette formule connue,

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{tang}\frac{\widehat{b}-\widehat{c}}{2} = \frac{ac-ab}{ac+ab}\cot\frac{\widehat{a}}{2},$$

et de là, en substituant...

$$\operatorname{tang}\frac{B-C}{2} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\cot\frac{A}{2}. \qquad (VI_1)$$

2°. Le triangle $ab'c$ nous donne de même

$$\text{(C)} \qquad \operatorname{tang}\frac{\widehat{c}-\widehat{b'}}{2} = \frac{ab'-ac}{ab'+ac}\cot\frac{\widehat{a}}{2}.$$

On a d'ailleurs dans ce triangle

$$\widehat{c}-\widehat{b'} = A-2E = 2^{\text{dr}}-(B+C); \quad \frac{\widehat{a}}{2} = 1^{\text{dr}}-\frac{A}{2};$$

et

$$\frac{ab'-ac}{ab'+ac} = \frac{\cot\frac{c}{2}-\operatorname{tang}\frac{b}{2}}{\cot\frac{c}{2}+\operatorname{tang}\frac{b}{2}} = \frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}}.$$

Il vient donc, en substituant,

$$\cot\frac{B+C}{2} = \frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}}\operatorname{tang}\frac{A}{2},$$

ou

$$\operatorname{tang}\frac{B+C}{2} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\cot\frac{A}{2}. \qquad (VI_2)$$

Les formules (VI_1) et (VI_2) forment deux des analogies de Néper; et la considération du triangle supplémentaire fournit les deux autres, à sa-

voir :

$$\tang\frac{b-c}{2} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}\tang\frac{a}{2} \quad (VI_3)$$

et

$$\tang\frac{b+c}{2} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}\tang\frac{a}{2}. \quad (VI_4)$$

7. *Expressions des sinus et cosinus du demi-excès sphérique.*

Le triangle rectiligne $ab'c$, dans lequel l'angle $\widehat{b'}$ est égal au demi-excès, donne la relation

$$(D) \qquad \frac{\sin\widehat{b'}}{\sin a} = \frac{ac}{b'c};$$

et de là, en substituant,

$$\sin E = \frac{\tang\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\sin A,$$

ou enfin

$$\sin.E = \frac{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\sin A; \quad (VII)$$

et si l'on veut remplacer dans cette formule $\sin A$ par sa valeur, il vient

$$\sin.E = \frac{\sqrt{\sin p.\sin(p-a).\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}. \quad (VII')$$

Si l'on veut obtenir $\cos E$, on appliquera au triangle $ab'c$ la formule connue

$$(E) \qquad ab' = ac.\cos\widehat{a} + cb'\cos\widehat{b},$$

et par les mêmes substitutions on en déduira

$$\cos E = \frac{\cot\frac{c}{2} + \tang\frac{b}{2}\cos A}{\cos\frac{a}{2} : \cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cdot\frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}}{\cos\frac{a}{2}},$$

ou bien

$$\cos E = \frac{\cos a - \cos b\cos c + 4\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}};$$

et si l'on remplace enfin dans le numérateur $2\cos^2\frac{b}{2}$ et $2\cos^2\frac{c}{2}$ par $1+\cos b$ et $1+\cos c$, il viendra définitivement

$$\cos E = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}. \quad \text{(VIII)}$$

8. *Expression de la tangente du quart de l'excès spherique.*

Si, dans le triangle $ab'c$, on désigne par α, β, γ les côtés opposés aux angles a, b', c, et par 2ϖ le périmètre $\alpha+\beta+\gamma$, on a

$$\text{(F)} \qquad \tang\frac{\widehat{b'}}{2} = \tang\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{(\varpi-\alpha)(\varpi-\gamma)}{\varpi(\varpi-\beta)}};$$

et si l'on calcule les valeurs de ϖ, $\varpi-\alpha$, etc., on trouve

$$\tang\frac{E}{2} = \sqrt{\tang\frac{p}{2}\cdot\tang\frac{p-a}{2}\cdot\tang\frac{p-b}{2}\cdot\tang\frac{p-c}{2}}. \quad \text{(IX)}$$

9. *Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère. Théorème analogue à celui de Legendre*

Nous désignerons, dans ce qui suit, par a, b, c et R les nombres qui mesurent, au moyen d'une même unité de longueur, les côtés du triangle sphérique et le rayon de la sphère. Les rapports $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ seront des nombres très-petits, que nous appellerons des *infiniment petits du premier ordre*. Nous appellerons de même infiniment petits du second, troisième et quatrième ordre, des nombres tels que $\frac{a^2}{R^2}$, $\frac{b^3}{R^3}$, $\frac{c^4}{R^4}$, et nous désignerons ces infiniment petits des divers ordres par ε, ε^2, ε^3, ε^4.

Cela posé, considérons comme précédemment (*voir* la figure de la page 32) le triangle sphérique ABC, le triangle rectiligne abc et un second triangle rectiligne AB_1C_1, semblable à abc, de dimensions doubles et que l'on peut construire géométriquement en projetant les sommets A, B, C du triangle sphérique, suivant le centre de projection A' et sur le plan tangent en A. Les angles du triangle rectiligne AB_1C_1 auront pour valeurs exactes A, $B_1 = B - E$, $C_1 = C - E$; et si l'on désigne ses côtés par a_1, b_1, c_1, on aura, en rétablissant le rayon de la sphère dans les formules (A) et (B) de la page 34, qui donnent $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$,

$$a_1 = 2\overline{bc} = \frac{2R\sin\frac{a}{2R}}{\cos\frac{b}{2R}\cdot\cos\frac{c}{2R}} = \frac{a-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} = a - \varepsilon^2,$$

$$b_1 = 2\overline{ac} = \frac{2R\sin\frac{b}{2R}}{\cos\frac{b}{2R}} = b - \varepsilon^2,$$

$$c_1 = c - \varepsilon^2.$$

Ainsi, les côtés du triangle rectiligne AB_1C_1 ne diffèrent des côtés correspondants du triangle sphérique proposé, que par des infiniment petits du second ordre. Il en résulte immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Si les côtés a, b, c d'un triangle sphérique sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, on peut substituer à sa résolution celle d'un triangle rectiligne auxiliaire, ayant pour l'un de ses côtés a, et pour angles* A, $B - E$, $C - E$ ($2E$ *désignant l'excès sphérique*); *et les deux autres côtés de ce triangle ne différeront des côtés correspondants du triangle sphérique que par des infiniment petits du second ordre.*

On voit en effet que le triangle auxiliaire dont il s'agit étant semblable au triangle AB_1C_1, et ayant pour l'un de ses côtés a, qui ne diffère de a_1 que par un infiniment petit du second ordre, les différences entre les autres côtés homologues des deux triangles rectilignes seront du même ordre; et qu'il en sera de même, par conséquent, des différences entre les derniers côtés du triangle auxiliaire et du triangle sphérique.

Remarque. — Le théorème précédent peut, ce nous semble, être employé aux mêmes usages que le théorème analogue de Legendre. Toutefois, l'emploi de ce théorème exige, comme on le sait pour celui de Legendre, que le triangle auxiliaire que l'on substitue au triangle sphérique aît même surface que ce dernier. Or, il est facile de démontrer que *la différence entre les surfaces du triangle sphérique et du triangle auxiliaire défini précédemment, est un infiniment petit du second ordre.*

Il suffira, en effet, pour le démontrer de faire voir que la différence entre les surfaces S, S_1 des riangles ABC, AB_1C_1 est du même ordre.

On a, en effet,

$$S = R^2 . 2E \tag{1}$$

et

$$S_1 = \frac{b_1 c_1 \sin A}{2}. \tag{2}$$

Or la formule (VII), page 38, devient, en y rétablissant le rayon de la sphère, et en développant les sinus et cosinus,

$$\sin E = \frac{\sin\frac{b}{2R}\sin\frac{c}{2R}\sin A}{\cos\frac{a}{2R}} = \frac{\frac{bc\sin A}{4R^2} - \varepsilon^4}{1 - \lambda\frac{a^2}{4R^2}} = \frac{bc\sin A - \varepsilon^2}{4R^2 - a^2\lambda},$$

λ étant un nombre.

On en déduit, par la division,

$$\sin E = \frac{bc\sin A}{4R^2} + \varepsilon^4.$$

D'après cette formule $\sin E$ et par suite E sont du second ordre; la différence entre E et $\sin E$ est donc du sixième ordre, et l'on peut

écrire

$$E = \frac{bc \sin A}{4R^2} + \varepsilon^4,$$

ou

$$2E = \frac{bc \sin A}{2R^2} + \varepsilon^4.$$

De là, en multipliant par R^2, et ayant égard à (1), il vient

$$(1') \qquad S = \frac{bc \sin A}{2} + \varepsilon^2;$$

et si l'on observe que $\frac{bc.\sin A}{2}$ ne diffère de $\frac{b_1 c_1 \sin A}{2} = S_1$, que par un infiniment petit du second ordre, il vient enfin

$$(1'') \qquad S = S_1 + \varepsilon^2, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Scolie. — On peut, d'après ce qui précède, substituer au triangle sphérique proposé l'un quelconque des triangles rectilignes suivants :

1°. Le triangle T_1, ayant pour l'un de ses côtés a et pour angles $\begin{cases} A, \\ B - E, \\ C - E. \end{cases}$

2°. Le triangle T_2, ayant pour l'un de ses côtés a et pour angles $\begin{cases} A - E, \\ B, \\ C - E. \end{cases}$

3°. Le triangle T_3, ayant pour l'un de ses côtés a et pour angles $\begin{cases} A - E, \\ B - E, \\ C. \end{cases}$

Prenant les données moyennes entre les trois systèmes de données qui précèdent, on retrouve le triangle de Legendre,

$\mathfrak{T}$, ayant pour un de ses côtés a et pour angles $\begin{cases} A - \frac{2E}{3}, \\ B - \frac{2E}{3}, \\ C - \frac{2E}{3}. \end{cases}$

26. *Établissement de quelques formules relatives aux quadrilatères sphériques.*

1. *Dans tout quadrilatère sphérique inscrit à un petit cercle, le produit des sinus des moitiés des diagonales est égal à la somme des produits des sinus des moitiés des côtés opposés.*

Projetons en effet le quadrilatère inscrit ABCD, en prenant pour centre de projection le point A′, diamétralement opposé au sommet A : nous obtiendrons un quadrilatère plan $abcd$ qui sera inscriptible et fournira la relation

$$(1) \qquad ac.bd = ab.cd + bc.ad;$$

or, si l'on désigne par a, b, c, d les côtés AB, BC, CD, DA, par m, n les diagonales AC, BD, on établit facilement que la relation (1) se transforme dans la suivante :

$$\text{(I)} \qquad \sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2}.$$

Remarque I. — La relation (I) a été découverte par M. Collète, soldat de marine (*Nouvelles Annales*, 1849, page 440). La démonstration précédente a l'avantage d'établir la proposition réciproque en même temps que la proposition directe. Car, si la relation (I) a lieu pour un quadrilatère sphérique ABCD, la relation (1) aura lieu pour le quadrilatère plan *abcd*, qui en est la projection stéréographique. Donc, d'après la réciproque déjà établie du théorème de Ptolémée, le quadrilatère *abcd* sera inscriptible; il en sera donc de même du quadrilatère sphérique ABCD.

Remarque II. — On établirait de même, quoique par un calcul plus long, cette seconde relation

$$\text{(II)} \qquad \frac{\sin\frac{m}{2}}{\sin\frac{n}{2}} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}},$$

que M. Collète établit aussi à l'endroit déjà cité.

2. *Expression du sinus du quart de l'excès d'un quadrilatère sphérique quelconque.*

Soit un quadrilatère sphérique ABCD; désignons par a, b, c, d, m, n ses côtés et ses diagonales AB, BC, CD, DA, AC, BD; posons

$$A + B + C + D - 4^{dr} = 2E,$$

et proposons-nous d'évaluer $\sin\frac{E}{2}$.

Formons, à cet effet, la projection stéréographique du quadrilatère ABCD, en prenant pour centre de projection le point A′, diamétralement opposé au sommet A. Nous obtiendrons un quadrilatère *abcd*, dont les côtés *ab*, *ad* sont rectilignes et les côtés *bc*, *cd* circulaires; et, si nous menons les tangentes *bt*, *ct* à l'arc *bc*, les tangentes *cu*, *du* à l'arc *cd*, l'hexagone plan *abtcud* nous donnera

$$A + B + C + D + \widehat{t} + \widehat{u} = 8^{dr},$$

ou

$$2E = 4^{dr} - (\widehat{t} + \widehat{u}).$$

Or, si l'on appelle c' le second point d'intersection des arcs *bc*, *cd*, et si l'on mène les droites $c'b$, $\overline{c'ac}$, $c'd$, on voit facilement que l'on a

$$\widehat{t} = 2^{dr} - 2.\widehat{bc'c}, \quad \widehat{u} = 2^{dr} - 2.\widehat{dc'c}.$$

On en déduit

$$2.\widehat{bc'd} = 4^{\text{dr}} - (\widehat{t} + \widehat{u}) = 2\text{E},$$

et

$$\text{E} = \widehat{bc'd}.$$

Cela posé, si l'on joint bd, le triangle rectiligne $bc'd$ donne

$$(a) \qquad \sin^2\frac{\text{E}}{2} = \sin^2\frac{\widehat{bc'd}}{2} = \frac{(\overline{bd} + \overline{bc'} - \overline{dc'})(\overline{bd} + \overline{dc'} - \overline{bc'})}{4.\overline{bc'}.\overline{dc'}}.$$

On lit d'ailleurs facilement sur la figure les valeurs de ces lignes, à savoir :

$$\overline{bd} = \frac{\sin\frac{n}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2}}, \quad \overline{bc'} = \frac{\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{m}{2}}, \quad dc' = \frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{d}{2}\sin\frac{m}{2}}.$$

Substituant ces valeurs dans la formule précédente, il vient

$$(\text{I}) \quad \sin^2\frac{\text{E}}{2} = \frac{\left(\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2} + \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}\right)\left(\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2} + \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2} - \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}\right)}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}.$$

Corollaire I. — Si le quadrilatère proposé est inscriptible dans un petit cercle de la sphère, on trouve, en remplaçant le produit $\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2}$ par sa valeur, tirée de la formule (I), et en posant

$$a + b + c + d = 2p,$$

$$(\text{III}') \qquad \sin^2\frac{\text{E}}{2} = \frac{\sin\frac{p-a}{2}.\sin\frac{p-b}{2}.\sin\frac{p-c}{2}.\sin\frac{p-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}.$$

Corollaire II. — Si le quadrilatère est *en même temps* circonscriptible à un petit cercle, on aura, d'après un théorème connu, $a + c = b + d$, et la formule précédente deviendra

$$(\text{III}'') \qquad \sin^2\frac{\text{E}}{2} = \operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}\operatorname{tang}\frac{d}{2}.$$

Observation. — Les relations précédentes conduiraient, par la méthode connue, aux élégantes formules données par M. Dostor, et relatives à l'aire d'un quadrilatère plan. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1848, pages 69 et 229.)

SECONDE PARTIE.

DES MÉTHODES RELATIVES A LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE.

CHAPITRE PREMIER.

Des tangentes.

§ Ier. — ÉTAT DU PROBLÈME DES TANGENTES DANS LA GÉOMÉTRIE DES ANCIENS.

27. *Définition de la tangente d'après Euclide.—Remarques sur l'insuffisance de cette définition et sur le caractère essentiellement synthétique qu'elle présente.* — D'après les anciens géomètres, *la tangente en un point d'une courbe est une droite passant par ce point, et telle, qu'une seconde droite issue du même point ne puisse passer entre la première et la courbe.* Ainsi, Euclide, dans ses Éléments, détermine la position de la tangente à la circonférence en démontrant que toute droite perpendiculaire à l'extrémité du rayon tombe hors du cercle, et que *l'on ne peut mener aucune droite dans l'espace compris entre cette perpendiculaire et la circonférence.*

De cette définition il est facile de déduire la conséquence que : si d'un côté et de l'autre du point de contact la concavité de la courbe est tournée vers une même région, la tangente laissera d'un même côté tous les points de la courbe (ou au moins tous les points d'un arc fini de la courbe, entre les extrémités duquel se trouvera le point de contact). Ce fait général, rapproché de la propriété particulière de la tangente à la circonférence et aux autres sections coniques, a conduit à une seconde définition fréquemment employée par les géomètres modernes, imitateurs de la forme synthétique des anciens, et d'après laquelle *la tangente est une droite n'ayant qu'un point commun avec la courbe et laissant d'un même côté tous les points de celle-ci.*

Or si, revenant à la première définition, l'on essaye de l'appliquer à la résolution géométrique du problème des tangentes, on est immédiatement frappé du peu de ressources qu'elle présente en général, et l'on cesse de s'étonner que ce problème ait été à peine ébauché par les anciens. Il est d'ailleurs facile de se rendre compte, d'une manière générale, de l'insuffisance géométrique de cette définition.

Le créateur de la théorie des caustiques, Walter de Tschirnhausen, qui occupait un rang distingué parmi les savants de son temps les plus versés dans la philosophie des mathématiques, énumère longuement les diverses qualités que doit présenter toute définition, dans l'ouvrage ayant pour titre : *Medicina mentis, sive tentamen genuinæ logicæ.* Il y pose, entre autres,

ce précepte que toute définition doit renfermer le mode de formation, la *génération* de l'objet auquel elle se rapporte : *Secundò patet omnem rei singularis definitionem semper ejusdem rei primum formationis modum debere includere, quem alicujus rei generationem nuncupabo* (page 50). Or, on chercherait en vain l'idée première de la génération de la tangente dans la définition que nous en avons donnée plus haut, d'après les anciens; cette définition est donc incomplète, au point de vue philosophique, et c'est précisément de là que provient son insuffisance en géométrie.

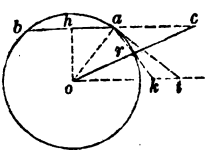
Elle présente d'ailleurs, à un haut degré, le caractère synthétique de la méthode exclusivement suivie par les anciens dans l'exposition de leurs découvertes géométriques. Car, tandis que la définition moderne de la tangente contient, implicitement, l'énoncé d'un problème dont la solution fournirait la construction de cette droite, celle des anciens indique seulement l'existence d'un théorème dont l'énoncé *inconnu* attribuerait une certaine position à la tangente cherchée, et dont la démonstration établirait que la tangente occupe en effet cette position.

Nous allons rapporter la solution donnée par Archimède du problème des tangentes aux hélices ou spirales. Cette solution offre un bel exemple de la méthode géométrique des anciens; elle présente quelques longueurs, mais ces longueurs sont nécessaires et rachetées d'ailleurs par la rigueur de la démonstration qui se trouve dégagée de tout usage de la considération de l'infini.

28. *De la tangente à la spirale d'Archimède.*

1. Lemme I. — *Dans un triangle, la bissectrice d'un angle, terminée au côté opposé, est moindre que la demi-somme des deux autres côtés.*

2. Lemme II. — *Soit dans une circonférence ayant pour centre le point o, ab une corde moindre qu'un diamètre, et soit oh perpendiculaire sur cette corde; on pourra toujours mener un rayon orc tel, que la portion de ce rayon, comprise entre la circonférence et la corde ab prolongée, soit à la corde ra dans un rapport donné, pourvu que ce rapport soit plus grand que celui de ah à oh.* (*Des hélices*, prop. 7.)



Démonstration. — Menons, en effet, le rayon indéfini *okt* parallèle à la corde *ab* et qui est coupé en *k* et en *t* par la corde *ar* prolongée et par la tangente en *a*.

Les triangles semblables *arc* et *kro* donnent l'égalité

$$\frac{cr}{ar} = \frac{or}{kr},$$

et l'on voit que ce dernier rapport, dont le numérateur est constant, varie en sens inverse de son dénominateur; et comme celui-ci va constamment en décroissant, depuis la valeur *at* jusqu'à zéro, lorsque le rayon variable *orc*

prend toutes les positions comprises entre oa et okt; on voit que le rapport $\frac{rc}{ra}$ peut prendre toutes les valeurs supérieures à $\frac{or}{at} = \frac{oa}{at} = \frac{ah}{oh}$.

C. Q. F. D.

3. Lemme III. — *Soient encore, dans une circonférence ayant pour centre le point o, ab une corde moindre qu'un diamètre, oh la perpendiculaire abaissée du centre sur la corde, et at la tangente à l'une des extrémités de la corde : on peut toujours mener un rayon ocrt tel, que la portion cr de ce rayon, interceptée entre la corde et la circonférence, soit au segment at que ce rayon intercepte sur la tangente issue du point a, dans un rapport donné, pourvu que ce rapport soit moindre que celui de ah à oh.*

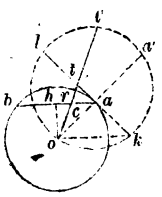
Démonstration. — On doit avoir

$$(A) \qquad \frac{cr}{at} = \frac{m}{n} \quad \text{et} \quad \frac{m}{n} < \frac{ah}{oh} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n} < \frac{oa}{ak},$$

ok étant la parallèle à la corde ab menée par le centre o et terminée au prolongement de la tangente; ou, comme $cr = oa - oc$, on doit avoir

$$(a) \qquad oc = oa - \frac{m}{n}\, at.$$

Prenons sur la tangente une longueur al telle, que l'on ait



$$(B) \qquad \frac{oa}{al} = \frac{m}{n}, \text{ d'où } \frac{oa}{al} < \frac{oa}{ak}, \text{ d'où } al > ak.$$

En remplaçant oa par cette valeur dans (a), on devra avoir

$$(b) \qquad oc = \frac{m}{n}(al - at) = \frac{m}{n}\, lt.$$

Or, le triangle otk et la ligne ca parallèle à sa base donnent

$$oc = ot.\frac{ak}{tk};$$

d'ailleurs

$$\frac{m}{n} = \frac{oa}{al};$$

donc, en substituant dans (b), on aura à satisfaire à cette relation,

$$(c) \qquad ot = \frac{oa}{al.ak}.\, tk.tl, \quad \text{ou} \quad \frac{ot}{tk.tl} = \frac{oa}{al.ak}.$$

Or, si l'on construit le cercle déterminé par les trois points o, k, l, et que oa et ot prolongées coupent ce cercle en a' et t', on aura ces deux égalités,

$$\frac{oa}{al.ak} = aa', \quad \frac{ot}{tk.tl} = tt'.$$

Par suite, en substituant dans la relation (c), on aura à déterminer le rayon $\overline{ocrtt'}$ par la condition

$$(d) \qquad tt' = aa'.$$

Or, on pourra toujours mener par le centre o et dans la région supposée un rayon ott' tel, que le segment tt' soit égal à aa', pourvu que ak soit moindre que al. Sous cette restriction, on voit très-bien que si le rayon mobile ocr, coïncidant d'abord avec oa, s'éloigne de oa en se rapprochant de ol, le segment intercepté tt' est d'abord supérieur à aa', et va constamment en augmentant jusqu'à ce que le rayon mobile passe par le centre du cercle okl. A partir de cet instant, le segment tt' allant toujours en diminuant et tendant vers zéro, il est clair que le rayon mobile atteindra une position intermédiaire pour laquelle le segment tt' sera précisément égal à aa'; c'est-à-dire pour laquelle le rapport $\frac{cr}{at}$ sera égal à $\frac{m}{n}$. D'ailleurs la restriction $al > ak$ entraîne celle-ci :

$$\frac{oa}{al} < \frac{oa}{ak} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n} < \frac{ah}{oh}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

4. *Définitions.* — On appelle *hélice*, ou *spirale*, la courbe engendrée par un mobile qui parcourt une droite avec une vitesse constante, pendant que celle-ci tourne d'un mouvement uniforme et dans un plan invariable, autour d'un point fixe o qui coïncide avec la position initiale du mobile. Le point o est *l'origine* de l'hélice; la droite qui joint le point o à un point de la courbe est le *rayon* de ce point, et la position initiale $o\alpha$ de la droite mobile est le *rayon-origine*. — Si l'on mène le rayon oa du point a de la courbe, et que du point o comme centre, avec oa comme rayon, on décrive une circonférence, nous entendrons toujours, dans ce qui suit, que l'arc de cette circonférence compris entre le rayon-origine $o\alpha$ et le rayon oa, est celui qui serait décrit par l'extrémité α du premier rayon, tournant autour de l'origine dans le sens du mouvement qui a donné naissance à la courbe, et venant coïncider avec le rayon oa.

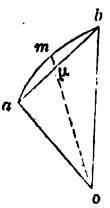
Enfin, un rayon quelconque oa sépare le plan de la courbe en deux régions, *celle des conséquents* qui renferme la portion de spirale déjà décrite par le mobile, et celle des *antécédents*. Nous ne considérerons d'ailleurs dans ce qui suit que la première spire de l'hélice, décrite pendant la première révolution de la droite mobile.

Cela posé, la définition de la courbe conduit immédiatement aux conséquences suivantes :

5. *Les rayons qui aboutissent à deux points de l'hélice sont entre eux comme les arcs interceptés entre le rayon-origine et chacun de ces rayons, sur une circonférence ayant pour centre le point-origine.* (*Des hélices*, prop. 14.)

6. *Si l'on considère dans l'hélice trois rayons séparés par des angles égaux, le rayon intermédiaire est égal à la demi-somme des rayons extrêmes.* (Prop. 12.)

COROLLAIRE I. — Un arc quelconque de la courbe qui correspond à un angle inférieur à 2 droits, ayant son sommet à l'origine, est tout entier situé, par rapport à sa corde, du côté opposé à l'origine.



Car, si l'on mène la bissectrice de l'angle aob, coupant l'arc et sa corde en m et μ, on aura

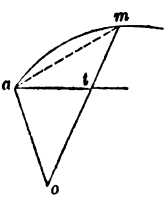
$$om = \frac{oa + ob}{2},$$

et par suite, d'après le Lemme I,

$$om > o\mu.$$

En répétant la même construction pour les angles partiels aom, bom,..., on obtiendra de nouveaux points de la courbe, tous plus éloignés de l'origine que les points correspondants de la corde ab.

COROLLAIRE II. — Le rayon qui aboutit en un point quelconque m de l'hélice, est moindre que le rayon correspondant ot terminé à la tangente en un point a de cette courbe.



Car si l'on avait $om \geqq ot$, on verrait, en joignant la corde am, que l'on pourrait mener par le point a une infinité de droites comprises entre l'arc am et la tangente supposée at.

COROLLAIRE III. — *Toute tangente à l'hélice ne rencontre celle-ci qu'en un point.* (Prop. 13.)

7. THÉORÈME I. — *Le rayon oa qui aboutit en un point a de la courbe, fait un angle obtus avec la portion de la tangente en ce point qui est dirigée du côté des antécédents.* (Prop. 16.)

Démonstration. — Du point o comme centre, avec oa pour rayon, décrivons une circonférence. La portion de la courbe située du côté des antécédents tombera nécessairement hors de cette circonférence : il en sera donc de même (6, Coroll. II), à fortiori, de la portion at de la tangente à la courbe en a, dirigée vers les antécédents. Il résulte de là que l'angle considéré, oat, est droit ou obtus, et ne saurait être aigu.

Pour écarter la première hypothèse, supposons un moment que l'angle oat soit droit, at étant alors une tangente commune à l'hélice et à la circonférence oa. On établit facilement que par le centre o de la circonférence on peut mener une droite indéfinie ort telle, que le rapport au rayon oa, du segment rt intercepté sur cette droite entre la circonférence et la tangente at, soit moindre que le rapport à l'arc αa (compris entre le rayon-origine $o\alpha$ et le rayon oa), de l'arc ar intercepté entre le rayon oa et le rayon ort. (Prop. 5.)

On aurait donc pour ce rayon ort, que nous supposons d'ailleurs dirigé

vers les *antécédents*,

$$\frac{rt}{or} < \frac{\text{arc}\, ar}{\text{arc}\, \alpha a},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{ot}{or} = \frac{ot}{oa} < \frac{\text{arc}\, \alpha r}{\text{arc}\, \alpha a}.$$

Mais, si l'on désigne par m le point de la courbe situé sur le rayon ort, on aura (5)

$$(2) \qquad \frac{om}{oa} = \frac{\text{arc}\, \alpha r}{\text{arc}\, \alpha a}.$$

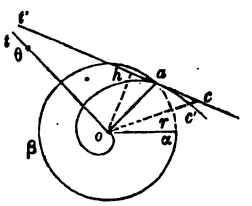
On aurait donc, en comparant (1) et (2),

$$ot < om,$$

ce qui montre, d'après le corollaire II du numéro précédent, que la droite at ne saurait être tangente à l'hélice. Donc l'angle oat ne saurait être droit; donc il est nécessairement obtus. C. Q. F. D.

8. Théorème II. — *La tangente en un point quelconque a de l'hélice intercepte sur la droite menée par l'origine, perpendiculairement au rayon oa qui aboutit au point de contact, un segment d'une longueur égale à l'arc intercepté sur la circonférence décrite du point o comme centre, avec oa comme rayon, par le rayon-origine oα et le rayon oa.* (Prop. 20.)

Démonstration. — En désignant par t le point d'intersection de la tangente en a et de la perpendiculaire au rayon oa menée par le point o, il s'agit d'établir la relation



$$(\mathrm{I}) \qquad ot = \text{arc}\, \alpha\beta a.$$

Première partie. — Supposons d'abord que l'on ait

$$(\mathrm{A}) \qquad ot > \text{arc}\, \alpha\beta a,$$

on pourra alors trouver une longueur $o\theta$ satisfaisant à la double inégalité

$$(a) \qquad \text{arc}\, \alpha\beta a < o\theta < ot.$$

Par suite, en abaissant oh perpendiculaire sur at, on aura

$$\frac{ah}{oh} = \frac{oa}{ot} < \frac{oa}{o\theta},$$

ou encore

$$(b) \qquad \frac{oa}{o\theta} > \frac{ah}{oh}.$$

On pourra donc toujours, d'après le lemme II, mener dans la circonférence $\alpha\beta a$ un rayon orc tel, que l'on ait

$$\frac{rc}{ar} = \frac{oa}{o\theta}, \quad \text{ou} \quad \frac{rc}{oa} = \frac{ar}{o\theta} < \frac{\text{arc}\, ar}{\text{arc}\, \alpha\beta a},$$

ou, en ajoutant l'unité aux deux membres, on pourra mener un rayon orc tel, que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{oc}{oa} < \frac{\text{arc}\,\alpha\beta ar}{\text{arc}\,\alpha\beta a}.$$

Or, en désignant par c' le point de la courbe situé sur le rayon orc, on a, d'après le n° 5,

$$(2) \qquad \frac{oc'}{oa} = \frac{\text{arc}\,\alpha\beta ar}{\text{arc}\,\alpha\beta a}.$$

On aurait donc par comparaison

$$(3) \qquad oc < oc',$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse que la droite tac est tangente à l'hélice (*voir* le n° 3, coroll. II); on ne saurait donc avoir $ot > \text{arc}\,\alpha\beta a$.

Deuxième partie. — Supposons, en second lieu, que l'on ait

$$(A') \qquad ot < \text{arc}\,\alpha\beta a.$$

On pourra alors trouver une longueur $o\theta$ satisfaisant à la double condition

$$(a') \qquad ot < o\theta < \text{arc}\,\alpha\beta a.$$

Par suite, en menant encore oh perpendiculaire sur at, on aura

$$\frac{ah}{oh} = \frac{oa}{ot} > \frac{o}{o\theta},$$

ou

$$(b') \qquad \frac{oa}{o\theta} < \frac{ah}{oh}.$$

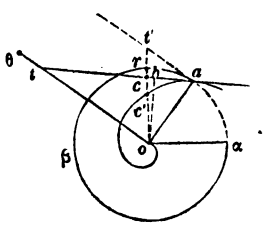
Donc, si l'on mène la droite at', tangente en a au cercle $\alpha\beta a$, on pourra toujours, d'après le lemme III, mener un rayon $ocrt'$ tel, que l'on ait la relation

$$\frac{cr}{at'} = \frac{oa}{o\theta}, \quad \text{ou} \quad \frac{cr}{oa} = \frac{at'}{o\theta},$$

ou enfin

$$\frac{cr}{oa} > \frac{\text{arc}\,ar}{\text{arc}\,\alpha\beta a},$$

puisque $at' > \text{arc}\,ar$ et que $o\theta < \text{arc}\,\alpha\beta a$.



Si l'on retranche de l'unité les deux membres de l'inégalité précédente, on trouve

$$(1') \qquad \frac{oc}{oa} < \frac{\text{arc}\,\alpha\beta r}{\text{arc}\,\alpha\beta a}.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par c' le point de la courbe située sur le rayon ocr, on a, d'après la proposition 5,

$$(2') \qquad \frac{oc'}{oa} = \frac{\text{arc}\,\alpha\beta r}{\text{arc}\,\alpha\beta a};$$

on aurait donc, par la comparaison des relations (1') et (2'),

$$(3') \qquad oc < oc',$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse que la droite *act* est tangente à l'hélice. Donc on ne peut supposer $ot < \text{arc}\,\alpha\beta a$. Mais il est déjà démontré que l'on ne peut supposer $ot > \text{arc}\,\alpha\beta a$; donc on a

$$ot = \text{arc}\,\alpha\beta a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

29. *De la tangente à la courbe décrite par un point dont on connaît la loi des distances à deux foyers.*

PROBLÈME. — *Construire la tangente de la courbe représentée en coordonnées bipolaires par l'équation*

$$r.\lambda + r'.\lambda' = \text{L},$$

dans laquelle λ, λ' *désignent des nombres positifs et* L *une longueur donnée.*

Construction. — Que l'on joigne le point décrivant a aux deux foyers f, f' et que du point a comme centre, avec un rayon quelconque, on décrive l'arc mm' terminé aux rayons vecteurs fa, $f'a$: si l'on mène la corde mm', et si on la divise au point n en deux parties réciproquement proportionnelles aux nombres λ, λ',

$$\frac{mn}{m'n} = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

la droite $\overline{an}$ sera normale en a à la courbe considérée.

Démonstration. — Menons $\overline{tat'}$ perpendiculaire à an ; pour démontrer que cette ligne est tangente à la courbe, il suffira d'établir :

1°. Que la droite at n'a que le point a commun avec la courbe;

2°. Que la droite at laisse d'un même côté tous les points de la courbe.

Première partie. — Soit b un point quelconque de la droite at; joignons bf, bf' et abaissons bp, bp' respectivement perpendiculaires sur fa, fa' prolongées au besoin; menons également mq, $m'q'$ perpendiculaires sur la droite an. Les triangles semblables bap, amq; bap', $am'q'$ donnent les relations

$$\frac{ap}{ab} = \frac{mq}{am}, \quad \frac{ap'}{ab} = \frac{mq}{am'};$$

et de là, en divisant membre à membre et en observant que $\frac{am'}{am} = 1$, et que $\frac{mq}{m'q'} = \frac{mn}{m'n} = \frac{\lambda'}{\lambda}$, il vient

$$\frac{ap}{ap'} = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

ou

$$(1) \qquad \lambda.ap - \lambda'.ap' = 0.$$

D'ailleurs le point a appartenant à la courbe, on a

$$(2) \qquad \lambda.af + \lambda'.af' = \text{L}.$$

Il vient donc, en retranchant (1) de (2) membre à membre,

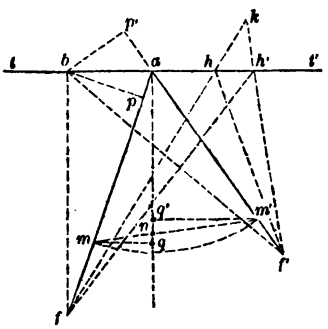
$$(3) \qquad \lambda.fp + \lambda'.f'p' = \mathrm{L}.$$

Il en résulte immédiatement

$$(4) \qquad \lambda.fb + \lambda'.f'b > \mathrm{L};$$

et cette relation montre que le point b ne saurait appartenir à la courbe.

Observation. — Il pourrait arriver, pour une position du point b suffisamment éloignée de a dans la partie at, que le point p fût situé sur le prolongement de $\overline{af}$. Dans ce cas, en retranchant (1) de (2) et observant que $\overline{ap}$ est plus grand que $\overline{af}$, il vient



$$(3') \qquad \lambda'.f'p' - \lambda.fp = \mathrm{L},$$

qui entraîne encore la relation (4).

Deuxième partie. — Soit k un point situé d'une manière quelconque au delà de la droite tat', par rapport aux foyers f, f' : joignons fk, $f'k$ qui coupent tat' en h, h'; et joignons fh', $f'h$.

1°. Supposons $\lambda > \lambda'$. On a, dans le triangle hkf',

$$hk + kf' > hf',$$

d'où, *à fortiori*,

$$\lambda.hk + \lambda'.kf' > \lambda'.hf';$$

et de là, en ajoutant $\lambda.fh$ aux deux membres,

$$\lambda.fk + \lambda'.f'k > \lambda.fh + \lambda'.f'h.$$

Et comme, le point h étant situé sur la droite tat', on a

$$\lambda.fh + \lambda'.f'h \geqq \mathrm{L};$$

le signe inférieur ayant lieu dans le cas unique où le point h coïnciderait avec le point a, il vient, dans tous les cas,

$$(5) \qquad \lambda.fk + \lambda'.f'k > \mathrm{L},$$

ce qui montre que le point k ne saurait appartenir à la courbe.

2°. On traiterait d'une manière *symétrique* le cas où l'on aurait $\lambda' > \lambda$.

Remarque. — La construction et la démonstration qui précèdent ont été données par Fatio de Duillier (*Bibliothèque universelle et historique*, tome V, 1687, page 25). On voit que la tangente y est considérée comme une droite n'ayant qu'un point commun avec la courbe, et laissant d'un même côté tous les points de celle-ci.

§ II. — Méthode de Roberval.

30. *Conception générale de Roberval sur la description des courbes par le mouvement d'un point; sa solution du problème des tangentes par la composition des différentes vitesses qui animent le point décrivant.* — Dans son Traité des mouvements composés (*), Roberval énonce, ainsi qu'il suit, le principe qui sert de base à sa méthode et la manière générale d'appliquer ce principe à la solution du problème des tangentes :

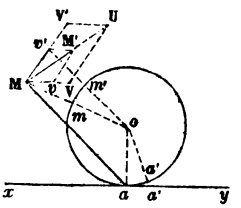
Axiome ou principe d'invention.

La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point.

Règle générale pour l'application de ce principe.

Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données), examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

31. *Application aux cycloïdes et aux roulettes.* — Soit M un point de la courbe engendrée par le mouvement d'un point invariablement lié à un cercle $a'amm'$ qui roule sur une base quelconque xy, droite ou courbe. Considérons le mouvement de la circonférence mobile par lequel l'arc infiniment petit aa' de cette circonférence s'enroule sur la base xy. Ce mouvement aura pour effet : 1° de communiquer à chaque point M invariablement lié au cercle un mouvement de translation parallèle à l'élément actuel aa' de la base, et dont la vitesse MV sera proportionnelle à l'arc aa'; 2° d'imprimer au même point M un mouvement de rotation autour du centre o, par lequel il tournerait autour du point o d'un angle $Mov' = mom' = aoa'$, la vitesse de ce second mouvement étant proportionnelle à l'arc infiniment petit Mv' et dirigée suivant une droite perpendiculaire à oM; soit MV' cette seconde vitesse composante. Si donc sur les deux lignes MV, MV' on construit un parallélogramme, la diagonale MU de ce parallélogramme sera la tangente cherchée.



Or joignons aM. On a, dans le triangle MVU,

$$\frac{MV}{VU} = \frac{MV}{MV'} = \frac{\text{arc}\,aa'}{\text{arc}\,Mv'} = \frac{\text{arc}\,mm'}{\text{arc}\,Mv'} = \frac{om}{oM} = \frac{oa}{oM}.$$

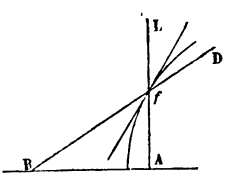
(*) *Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique, par MM. de l'Académie des Sciences*, page 80. Le *Traité des Mouvements composés* fut rédigé par un gentilhomme bordelais, d'après les leçons qu'il avait reçues de Roberval sur cette matière. Celui-ci revit d'ailleurs ce traité avant que de le lire devant l'Académie des Sciences, et écrivit en marge quelques observations critiques, qui ont été conservées dans l'ouvrage dont nous extrayons ces détails, et qui portent d'ailleurs sur la forme et non sur le fond même des démonstrations.

Les deux triangles MVU et *ao*M sont donc semblables, comme ayant un angle égal ($\widehat{V} = \widehat{o}$), compris entre des côtés proportionnels. Donc, puisque les premiers côtés MV, VU du premier triangle sont respectivement perpendiculaires aux côtés *ao*, *o*M du deuxième côté, le troisième côté MU du premier est pareillement perpendiculaire au troisième côté *a*M du deuxième. Donc *la tangente en un point quelconque d'une roulette est perpendiculaire à la droite qui joint le point décrivant au point de contact correspondant de la ligne mobile sur la ligne fixe.*

32. *Insuffisance de la méthode précédente. — Applications vicieuses qui en ont été faites, quoique sans erreur définitive, à des exemples auxquels elle doit rester étrangère.* — Quelque élégant que soit le principe précédent, on reconnaît cependant que les applications de la méthode qui en résulte se bornent à quelques cas spéciaux tels que celui que nous venons d'examiner; la détermination des différentes vitesses animant le mobile qui est supposé décrire la courbe, offrant en général de grandes difficultés. Notre sujet présente même cette particularité curieuse, que sur les quatorze exemples auxquels Roberval applique sa méthode, les seuls exemples de la roulette et des lignes spirales (spirale d'Archimède, conchoïde) sont bien choisis : ils sont du moins les seuls dans lesquels on puisse apercevoir d'une manière bien claire que Roberval a exactement appliqué le principe dont il était pourtant l'inventeur. Dans tous les autres cas, il paraît confondre les vitesses composantes du mobile, suivant deux directions, avec les projections de la vitesse totale sur ces directions; et ce n'est que par une sorte d'accident géométrique, si nettement mis en lumière par M. Duhamel dans son Cours de Géométrie infinitésimale à la Sorbonne, que cette confusion n'entraîne aucune inexactitude dans la construction définitive des tangentes aux courbes qu'il considère. Il arrive, en effet, pour toutes ces courbes, que les vitesses composantes du point décrivant sont égales, et, dans ce cas, la direction du mouvement résultant n'est pas changée par la substitution erronée des projections de la vitesse totale aux vitesses composantes elles-mêmes.

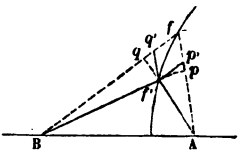
Rapportons, afin de légitimer ces assertions, la construction de la tangente à l'hyperbole donnée par Roberval à la page 82 de l'ouvrage indiqué :

A *et* B *étant les foyers de la courbe et* *f* *le point qui décrit l'hyperbole, en quelque lieu que se prenne le point* *f*, *il a deux mouvements : l'un par lequel il s'éloigne de* A *le long de la ligne* AL, *l'autre par lequel il s'éloigne de* B *le long de la ligne* BD. *Puis donc qu'il s'éloigne également de* A *et de* B *et que les deux directions sont* *f*L, *f*D, *ayant fait un rhombe duquel l'angle soit* D*f*L, *c'est à savoir ayant divisé l'angle* D*f*L *en deux parties égales...*, *la bissectrice de l'angle* D*f*L *sera la tangente cherchée.*



Mais, comment Roberval aperçoit-il l'égalité des vitesses composantes suivant A*f*, B*f*? Très-probablement en confondant les chemins élémen-

taires qui correspondent à ces vitesses composantes, avec les projections fp, fq, sur leurs directions, du chemin élémentaire ff' décrit dans le mouvement réel. Car si l'on voulait démontrer rigoureusement l'égalité des vitesses composantes fp', fq', il faudrait, en s'appuyant sur la propriété $fp = fq$, qui résulte de la définition de la courbe, établir d'abord que la direction-limite de l'élément de chemin ff', parcouru par le point décrivant, divise l'angle AfB en deux parties égales; ce qui rendrait ensuite inutile la composition des vitesses. La direction de la tangente aurait donc servi à déterminer le rapport des vitesses composantes, tandis que le contraire aurait dû avoir lieu.

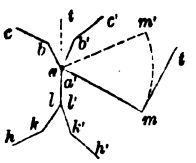


§ III. — Des tangentes aux courbes décrites par les différents points d'une figure plane donnée qui se meut dans son plan.

33. *Définition générale des roulettes. — Méthode de Descartes pour la description des tangentes à ces courbes. — Expression de l'élément rectiligne ou superficiel de la courbe qui résulte de l'emploi de cette méthode.* — La méthode dont nous allons nous occuper a été imaginée par Descartes à l'occasion du problème des tangentes à la cycloïde.

Supposons qu'une courbe plane (C'), entraînant dans son mouvement un point m qui lui est lié d'une manière invariable, roule sur une courbe fixe (C) située dans le même plan; dans ce mouvement le point m engendre une ligne appelée *roulette;* et la ligne fixe (C) est appelée la *base* de la roulette : cela posé, il s'agit de construire la tangente en un point quelconque de la roulette.

A cet effet, substituons avec Descartes, aux deux courbes (C) et (C') deux polygones (P) et (P') équilatéraux et d'un nombre très-considérable de côtés; la longueur commune des côtés étant la même pour les deux polygones et d'ailleurs infiniment petite. Soient $abc\ldots hkl$, $a'b'c'\ldots h'k'l'$ ces deux polygones que nous supposerons actuellement en contact suivant les côtés al, $a'l'$, et soit en outre m la position correspondante du point décrivant, invariablement lié au polygone $a'b'c'\ldots h'k'l'$. Le mouvement du polygone mobile (P'), qui a amené le côté $l'a'$ en contact avec la, continuant, aura pour effet d'amener le côté suivant $a'b'$ en contact avec son égal ab, en faisant tourner la figure (P') tout entière autour du point a (ou a') d'un angle égal à $b\widehat{a}b'$. Le mouvement élémentaire de la figure (P'), dans son passage de la position actuelle à la position suivante, n'est donc qu'un mouvement de rotation de toute cette figure autour du point a, extrémité commune des éléments la, $l'a'$ actuellement en contact. Le point m participe en particulier à ce mouvement et décrit le petit arc de cercle mm' ayant pour centre le point a. La tangente à la courbe décrite par le point m est donc perpendiculaire à la droite qui le réunit au point a.



La même construction ayant lieu quelque petits que soient les côtés des deux polygones que nous avons substitués aux lignes (C) et (C'), aura lieu aussi à la limite, c'est-à-dire quand on considérera le roulement de la courbe (C') elle-même sur la courbe (C). Donc *la normale en un point quelconque d'une roulette aboutit, à chaque instant, au point de contact correspondant de la ligne mobile sur la ligne fixe.*

Scolie I. — Les méthodes modernes pour la description des tangentes se séparent surtout en ceci de la méthode des géomètres anciens : que les premières conduisent toujours à l'expression, plus ou moins simple et plus ou moins utile d'ailleurs, de l'arc élémentaire de la courbe dont on sait construire la tangente; tandis que la marche même suivie par les anciens les écartait nécessairement d'un pareil résultat qui, tout secondaire qu'il soit dans le problème actuel, a cependant en lui-même une grande importance.

Or la méthode précédente est précisément l'une de celles qui conduisent à l'expression la plus utile de l'arc élémentaire de la courbe.

Désignons, en effet, par ε et ε' les angles de contingence en a et a' des deux polygones (P) et (P') qui ont été substitués aux courbes (C) et (C').

$\varepsilon = b\widehat{a}t$, $\varepsilon' = b'\widehat{a'}t$ (at ou $a't$ étant le prolongement commun de la et de $l'a'$). L'angle de rotation $b\widehat{a}b'$ est égal à la valeur absolue de l'expression $\varepsilon \pm \varepsilon'$, le signe $+$ ou le signe $-$ ayant lieu suivant que la ligne mobile roule sur la convexité ou sur la concavité de la courbe fixe; et comme l'angle $m\widehat{a}m'$ est égal à $b\widehat{a}b'$, on a d'abord, en désignant par r la distance am,

$$\text{arc}\, mm' = \pm r(\varepsilon \pm \varepsilon'),$$

d'où, en divisant par $\overline{ab} = \overline{a'b'}$,

$$\frac{\text{arc}\, mm'}{ab} = \pm r\left(\frac{\varepsilon}{ab} \pm \frac{\varepsilon'}{a'b'}\right).$$

Et de là, en passant aux limites et observant que $\frac{\varepsilon}{ab}$ et $\frac{\varepsilon'}{a'b'}$ ont pour limites $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho'}$ (ρ et ρ' désignant les rayons de courbure en a de la courbe mobile et de la courbe fixe), on a, en appelant ds et $d\sigma$ les différentielles correspondantes des arcs de la courbe mobile et de la roulette,

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\sigma}{ds} = \pm r\left(\frac{1}{\rho} \pm \frac{1}{\rho'}\right).$$

Scolie II. — La même méthode fournit encore l'expression de l'aire élémentaire de la roulette, cette aire étant l'espace compris entre l'arc mm' de la roulette, l'arc correspondant ab de la courbe fixe et les droites am, bm'.

Car cette aire se compose : 1° du secteur circulaire amm' qui a pour

expression $\pm \frac{1}{2} r^2(\varepsilon \pm \varepsilon')$; 2° du secteur $m'ab$, qui n'est autre chose que le secteur $ma'b'$ transporté dans une position infiniment voisine. Donc, en désignant par $d\Lambda$, $d\lambda$, ds les différentielles *correspondantes* de l'aire de la roulette, du secteur ayant pour sommet le point décrivant et pour base l'arc enroulé de la courbe mobile, et de l'arc enroulé de la courbe fixe, on aura

$$\text{(II)} \qquad d\Lambda = d\lambda \pm \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{1}{\rho} \pm \frac{1}{\rho'}\right) ds,$$

le signe $\pm$ qui est devant le dernier terme du second membre ayant pour objet de rendre ce terme additif dans tous les cas.

34. *Théorie des centres instantanés de rotation.* — Le mouvement d'une figure plane, de forme et de grandeur invariables, qui se déplace dans son plan, et plus généralement le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, ont été étudiés par plusieurs géomètres, et notamment par Euler et par MM. Poinsot et Chasles. Leurs travaux ont produit ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie des centres et axes instantanés de rotation, dont nous allons exposer les principes.

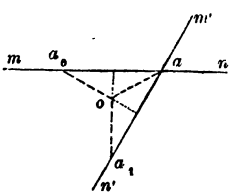
THÉORÈME I. — *Le mouvement élémentaire d'une figure plane de forme et de grandeur invariables, qui se déplace dans son plan, est toujours un mouvement infiniment petit de rotation autour d'un certain point fixe du plan.*

Le mouvement *élémentaire* de la figure est à chaque instant le mouvement infiniment petit par lequel cette figure passe de sa position actuelle à la position infiniment voisine qu'elle occupera dans l'instant suivant.

Démonstration. — Soient f et f' les positions occupées par la figure mobile F à deux époques *quelconques* de son mouvement, $\overline{mn}$, $\overline{m'n'}$ les deux positions occupées, dans f et f', par une même droite MN de la figure F; et a le point d'intersection des droites mn, $m'n'$.

1°. Considérons le point a comme un point de la figure mobile F dans sa première position f. Quand F passe de f en f', la droite MN passe elle-même de mn en $m'n'$, et le point a de mn vient quelque part en a_1 sur $m'n'$.

2°. Si, au contraire, nous considérons le point a comme un point de la figure mobile F dans sa position f', nous verrons que F revenant de f' en f, la droite MN revient elle-même de $m'n'$ en mn, et que le point a de $m'n'$ revient quelque part en a_0 sur mn.



On voit donc, d'après la définition des points a_0 et a_1, que dans le passage de la figure mobile de la position f à la position f', les points a_0 et a de $\overline{mn}$ viennent respectivement coïncider avec les points a et a_1 de $\overline{m'n'}$; et comme dans ce mouvement la figure reste invariable de forme

et de grandeur, on a l'égalité

$$a_0 a = a a_1.$$

Donc, si l'on mène par les milieux de $\overline{a_0 a}$, $\overline{a a_1}$ des perpendiculaires respectives à ces droites, lesquelles se coupent en o, le point o sera le centre d'un cercle passant par a_0, a et a_1, et l'angle $a_0 o a$ sera égal à l'angle $a o a_1$. Il résulte de là que l'on peut amener la droite $A_0 A$ de la ligne F de la position $a_0 a$ à celle de $a a_1$, et par suite la figure F elle-même de la position f à la position f', par une rotation de toute la figure f autour du centre o; l'angle décrit dans cette rotation étant $\widehat{a_0 o a}$. Donc

Si l'on considère un déplacement fini quelconque d'une figure dans son plan, on peut toujours amener cette figure de la première position à la dernière, en faisant tourner cette figure, prise dans la première position, d'un angle déterminé autour d'un point convenablement choisi dans son plan.

Dans cette substitution on n'a d'ailleurs égard qu'aux positions extrêmes et nullement aux positions intermédiaires de la figure mobile, qui ne sont pas reproduites, en général, dans le mouvement de rotation dont nous parlons. Le théorème précédent ayant lieu pour un mouvement fini quelconque de la figure F, aura encore lieu pour le mouvement élémentaire qui amène cette figure de la position f à la position *suivante* f'; mais alors toute restriction au sujet des positions de la figure mobile, intermédiaires à f et à f', disparaît, et l'on trouve le théorème énoncé.

Définition. — Le centre autour duquel s'effectue la rotation infiniment petite qui constitue, d'après ce qui précède, le mouvement élémentaire de la figure, reçoit le nom de *centre instantané de rotation.*

THÉORÈME II. — *Une figure* F *étant animée dans son plan d'un mouvement continu quelconque, ce mouvement pourra toujours être produit par le roulement sur une ligne fixe* (o), *d'une ligne* (ω), *invariablement liée à la figure* F, *et l'entraînant dans son mouvement.*

Démonstration. — Décomposons, en effet, le mouvement fini de la figure F dans ses mouvements élémentaires successifs qui sont, comme nous l'avons vu, des mouvements de rotation mesurés par des angles infiniment petits r, r', r'',..., s'effectuant autour des centres instantanés successifs o, o', o'',... Ces points se succèdent d'une manière continue, si le mouvement de la figure est lui-même continu, ce que nous supposons essentiellement, et forment une ligne polygonale à côtés infiniment petits qui se transformera à la limite en une courbe (o).

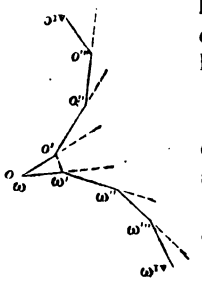
Or, considérons cette ligne polygonale $oo'o''$..., et désignons par c', c'', c''',..., ses angles de contingence en o', o'', o''',... Par le point o, autour duquel s'effectue la rotation initiale de la figure, menons une ligne polygonale $o\omega'\omega''\omega'''$..., ou $\omega\omega'\omega''\omega'''$..., dont les côtés successifs $\omega\omega'$, $\omega'\omega''$, $\omega''\omega'''$,..., soient respectivement égaux aux côtés oo', $o'o''$, $o''o'''$,..., et telle, en outre,

1° Que $\omega\omega'$ ou $o\omega$ fasse avec oo' un angle égal au premier angle de rotation r;

2° Que les angles de contingence $\gamma', \gamma'', \gamma''', \ldots$, en $\omega', \omega'', \omega''', \ldots$, soient définis par les équations

$$r' = c' + \gamma',$$
$$r'' = c'' + \gamma''.$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Enfin regardons la ligne $\omega\omega'\omega''\ldots$, ainsi définie, comme invariablement liée à la figure F, nous allons constater facilement que le mouvement de la figure F produira le roulement de la ligne $\omega\omega'\omega''\ldots$ sur la ligne $oo'o''\ldots$.



En effet, dans ses déplacements successifs,

1°. La figure F tourne d'abord autour du point o d'un angle égal à r; cette rotation amène donc $\omega\omega'$ sur son égale oo', le point ω' venant en o'; l'angle que fait alors $\omega'\omega''$ venue en $\omega'_1\omega''_1$ avec $o'o''$ est égal à la somme $c' + \gamma'$ des angles de contingence en o', ω', c'est-à-dire est égal à r';

2°. La figure F tourne ensuite autour du point o' (ou ω'_1) d'un angle égal à r'; cette rotation amène donc $\omega'_1\omega''_1$ sur son égale $o'o''$, le point ω''_1 venant en o'', et l'angle que fait alors $\omega''\omega'''$, venue en $\omega''_2\omega'''_2$, avec $o''o'''$ est égal à la somme $c'' + \gamma''$ des angles de contingence en o'' et ω'', c'est-à-dire égal à r'';

3°. La figure F tournant ensuite autour de o'' (ou ω''_2) d'un angle égal à r'', cette rotation amènera encore le côté $\omega''_2\omega'''_2$ sur son égal $o''o'''$, et ainsi de suite.

On voit donc que si l'on passe à la limite et que l'on désigne par (o) et (ω) les courbes limites des polygones $oo'o''\ldots$, $\omega\omega'\omega''\ldots$, *le mouvement considéré de la figure* F *produit le roulement, sur la courbe* (o), *de la ligne* (ω) *invariablement liée à la figure* F. *Donc,* réciproquement, *le mouvement considéré de la figure* F *peut être produit par le roulement sur une ligne fixe* (o), *d'une ligne* (ω) *invariablement liée à la figure* F *et l'entraînant dans son mouvement.* C. Q. F. D.

Remarque. — Le mouvement de la figure F étant connu, on peut, comme nous le verrons, déterminer à chaque instant la position du centre instantané de rotation, et déterminer par suite, *sur le plan immobile dans lequel se déplace la figure* F, la courbe (o), lieu des centres instantanés de rotation. Quant à la détermination de la ligne (ω) par rapport à la figure F à laquelle elle est invariablement liée, voici, d'après M. Chasles, la manière d'y parvenir : Regardant la figure F comme située dans un plan mobile, distinct du plan immobile de la ligne (o), et simplement superposé à celui-ci, on imaginera à chaque instant que le centre actuel de rotation [considéré comme appartenant spécialement au plan immobile de la ligne (o)] imprime sa trace sur le plan de la figure mobile : le lieu de ces traces sera la courbe cherchée (ω).

Scolie. — Les théorèmes précédents et leurs démonstrations s'appliquent, sans aucune modification, au mouvement d'une figure sphérique quelconque qui se déplacerait sans sortir de la sphère où elle est tracée : les nouveaux théorèmes qui en résultent servant de base, comme on sait, à l'étude du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

35. *Usages de la théorie précédente dans le problème des tangentes. — Examen des trois cas qui peuvent se présenter. — Applications.* — La théorie des tangentes et celles des courbes enveloppes, se prêtant ici un mutuel appui, nous indiquerons simultanément, et par anticipation sur le chapitre suivant, les applications de la théorie précédente aux deux problèmes des tangentes et des courbes enveloppes.

Qu'une figure F, de forme et de grandeur invariables, se meuve dans son plan et que l'on considère les courbes décrites dans ce mouvement par plusieurs points M, M', M'', ..., de cette figure. Soient m, m', m'', ..., les positions *correspondantes* des points décrivants, à une époque quelconque du mouvement. Le mouvement élémentaire suivant de la figure sera un mouvement infiniment petit de rotation autour d'un centre o, en vertu duquel les points m, m', m'', ..., décriront de petits arcs de cercle ayant pour centre commun le point o; donc,

1°. *Les normales aux courbes décrites par les différents points de la figure mobile, menées en des points* correspondants *de ces courbes, vont toutes concourir en un même point o, qui est le centre instantané de rotation correspondant à la position considérée de la figure mobile.*

Dans ce même mouvement, la droite qui joint deux points quelconques de la figure mobile, demeure dans son déplacement infiniment petit, à la même distance du centre... o; elle demeure donc tangente à un cercle ayant pour centre le point o, et, par suite, le point où cette droite touche son enveloppe est le pied de la perpendiculaire abaissée du point o sur cette droite; donc,

2°. *Les normales aux courbes enveloppées par les diverses droites de la figure mobile, menées en des points* correspondants *de ces courbes, vont toutes concourir en un même point o, centre instantané de rotation.*

Corollaire. — *Il résulte de ces deux propositions que si, dans le mouvement d'une figure donnée, on connaît à chaque instant :*

1. *Soit* le mouvement de deux points de cette figure, c'est-à-dire les normales aux lignes que décrivent ces points;

2. *Soit* le mouvement d'un seul point de la figure et le point où une droite de cette figure touche son enveloppe;

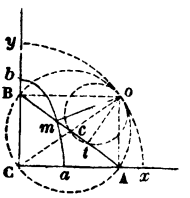
3. *Soit* enfin les points où deux droites de la figure touchent leurs enveloppes respectives;

On pourra, pour chaque position de la figure mobile, déterminer le centre instantané de rotation qui sera fourni par l'intersection de deux droites connues; et ce point une fois déterminé, on sera en état de construire les tangentes aux lignes décrites par tous les autres points de la figure mo-

bile, ainsi que les points où les différentes droites de cette figure touchent leurs enveloppes respectives.

APPLICATIONS.

1'. Considérons, en premier lieu, le mouvement d'une droite AB, de longueur constante, dont les extrémités A et B glissent sur deux axes rectangulaires Cx, Cy; on voit, soit d'après la théorie précédente, soit par des considérations géométriques directes : 1° que l'ellipse *amb*, décrite par un point quelconque *m* de la droite AB, n'est autre chose qu'une épicycloïde raccourcie (ou allongée), engendrée par un point *m* invariablement lié à la circonférence *o*ACB qui roule intérieurement sur la circonférence *xoy* de rayon double; et ce résultat nous sera utile dans la suite; 2° que la ligne enveloppe de la droite mobile AB est une épicycloïde engendrée par le point *t* de la circonférence *otc* roulant intérieurement sur la circonférence *xoy* de rayon quadruple.



2'. Si l'on considère, en second lieu, la courbe décrite par l'extrémité B d'une droite AB, de longueur constante, qui tourne autour d'un point fixe ou qui demeure tangente à une courbe donnée, et dont la seconde extrémité décrit une ligne directrice donnée, on rentrera dans le second des cas énumérés plus haut; et l'on parviendra facilement à la construction connue de la tangente à la *conchoïde* décrite par le point B.

3'. Si l'on considère enfin le mouvement d'un triangle donné ABC, dont deux côtés *b* et *c* demeurent tangents à deux circonférences fixes de rayon β et γ, on établit facilement que le troisième côté *a* demeure tangent à une troisième circonférence déterminée, de rayon α; et que l'on a cette relation

$$a.\alpha + b.\beta + c.\gamma = 2S,$$

S désignant la surface du triangle mobile. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1853, page 68.)

§ IV. — Définition de la tangente d'après les géomètres modernes. — Applications.

36. *Solutions du problème des tangentes d'après Descartes, Fermat et Barrow. — Dernière définition de la tangente.*

1. Dans sa seconde solution du problème des tangentes, Descartes imagine qu'une sécante tourne autour d'un point fixe pris sur le plan de la courbe, de manière que les deux extrémités de l'une des cordes qu'elle détermine dans la courbe se rapprochant de plus en plus l'une de l'autre, viennent enfin se confondre : à cet instant, la droite mobile est tangente à la courbe, et Descartes détermine son équation d'après cette condition que l'équation

$$f(x, ax + b) = 0,$$

dont les racines représentent les abscisses des points communs à la courbe

$f(x, y) = 0$, et à la tangente cherchée $y = ax + b$, ait deux racines égales. Cette condition s'exprime par une relation entre a et b, et cette relation, jointe à telle condition de description qu'on voudra imposer à la tangente cherchée, permet de la déterminer complétement.

Il résulte immédiatement de cette règle analytique que la solution de Descartes n'est actuellement applicable qu'aux courbes algébriques. Elle exige en effet que l'on puisse exprimer l'égalité de deux des racines de l'équation

$$f(x, ax + b) = 0,$$

ce qu'on ne sait faire encore que dans le cas où cette équation, et par suite l'équation de la courbe $f(x, y) = 0$, est algébrique. La solution de Descartes, comparée à la solution actuelle par l'emploi des dérivées, présente donc une infériorité notable. Elle a toutefois ses avantages propres dérivant du principe analytique qui lui sert de base; ils n'ont pas été signalés, que je sache, et consistent en ce que *la détermination de la tangente à une première courbe peut conduire à la construction des tangentes de plusieurs autres courbes*. Pour citer un exemple à l'appui de cette assertion, considérons les deux équations

$$(1) \qquad mx + ny = p,$$

$$(2) \qquad a^2 n^2 . y^2 + (p^2 - a^2 m^2) x^2 = a^2 (p^2 - a^2 m^2).$$

On sait, par la résolution préalable du problème des tangentes pour l'ellipse, que si x, y représentent des coordonnées rectilignes, la droite représentée par la première équation est tangente à l'ellipse que représente la seconde; car l'équation qui résulte de l'élimination de y entre les deux proposées, admet deux racines égales. Or, ce fait analytique étant indépendant de la signification géométrique attribuée aux variables x et y, subsistera encore si on les regarde, par exemple, comme représentant des coordonnées bipolaires. Dès lors, les nouvelles courbes représentées dans le nouveau système par les mêmes équations (1) et (2), auront encore deux points communs réunis en un seul, et auront par suite même tangente en ce point. Par suite, si l'on sait construire la tangente de l'une de ces courbes, on saura par cela même construire la tangente de l'autre. Or, dans le système actuel, l'équation (2) représente un cercle. On saura donc construire la tangente de la courbe à deux foyers que représente l'équation (1). On parvient en effet, en suivant cette voie, et par un calcul assez simple, à la construction déjà donnée à la page 51.

2. Fermat et Barrow employèrent, pour résoudre le problème des tangentes, un même principe et des procédés analytiques à peu près identiques. Ainsi, Fermat prend sur la tangente un point infiniment voisin du point de contact, et le regarde comme appartenant à la courbe. Cette supposition, qui détermine géométriquement la tangente, en assignant un second point par lequel elle doit passer, lui permet d'arriver à l'expression de la sous-tangente par des procédés analytiques qui sont précisément ceux du calcul différentiel.

La manière de Barrow, quoique revenant pour le fond à celle de Fermat, paraît plus lumineuse : il considère le triangle formé par une corde infiniment petite et par les parallèles aux axes des x et des y menés par les extrémités de cette corde; et il regarde ce triangle comme semblable à celui que la tangente et l'ordonnée déterminent sur l'axe des x. Cette similitude lui fournit, pour le rapport de la sous-tangente à l'ordonnée, une expression dont il calcule la valeur par des procédés analogues à ceux de Fermat.

On voit que, pour ces deux géomètres, la tangente a deux points communs avec la courbe; ces points sont infiniment voisins l'un de l'autre, mais ils ne sont pas actuellement confondus en un seul, comme ils l'étaient dans la solution de Descartes.

3. Ces modifications successives de la définition de la tangente ont enfin conduit à la définition actuelle d'après laquelle *la tangente en un point d'une courbe est la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante que l'on fait tourner autour de ce point, de manière qu'un second point d'intersection de la sécante avec la courbe se rapproche indéfiniment du premier.*

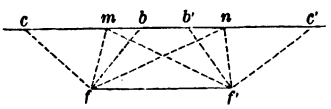
Combinée avec les principes du calcul différentiel, elle conduit immédiatement aux formules suivantes, les plus usitées :

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx}, \qquad \operatorname{tang}\alpha = r\frac{d\omega}{dr},$$

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{dr}{dr'}.$$

La dernière suppose la courbe rapportée à un système de coordonnées bipolaires r et r', et donne la relation qui existe entre les angles i et i' que la normale fait avec les rayons vecteurs r et r'.

Scolie. — La définition de la courbe fournit quelquefois, pour une sécante quelconque, une propriété géométrique simple qui conduit facilement alors à la propriété caractéristique de la tangente.



Prenons pour exemple l'ellipse de Cassini; soient f, f' ses deux foyers et mn une sécante quelconque : joignons $fm, f'm$; $fn, f'n$. On a, d'après la définition de la courbe,

$$fm.f'm = fn.f'n, \quad \text{ou} \quad \frac{fm}{fn} = \frac{f'n}{f'm}.$$

Si donc on construit les bissectrices des angles intérieur et extérieur en f et en f', à savoir fb et fc, $f'b'$ et $f'c'$, on aura

$$\frac{cm}{cn} = \frac{c'n}{c'm},$$

d'où

$$(1) \qquad cm = c'n.$$

Or cette propriété d'une sécante quelconque conduit très-simplement à

la construction de la tangente. Car si l'on suppose que le point n se rapproche indéfiniment du point m, les bissectrices intérieures fb, $f'b'$, tendront à se confondre respectivement avec les rayons vecteurs fm, $f'm$; les bissectrices extérieures, qui sont perpendiculaires aux premières, tendront à coïncider avec les droites fc, $f'c'$ perpendiculaires aux rayons fm, $f'm$; et, par suite, l'égalité (1) prise à la limite exprime que la portion de la tangente en m, comprise entre les droites fc, fc', est divisée par le point de contact en deux parties égales. (STEINER, *Journal de Crelle.*)

APPLICATIONS.

37. *Construire la tangente à la courbe décrite par un point dont on connaît la loi des distances à plusieurs foyers.*

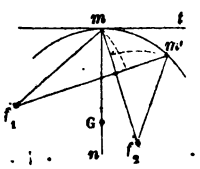
Soient

$$(1) \qquad F(r_1, r_2, \ldots) = 0,$$

et

$$(2) \qquad a_1 dr_1 + a_2 dr_2 + \ldots = 0,$$

la relation donnée entre les distances du point mobile m à des points fixes ou foyers $f_1, f_2, \ldots$ situés dans le plan où il se déplace, et la relation qui en résulte entre les différentielles des coordonnées focales du point m. Soient



mt et mn la tangente et la normale cherchée; mm' la corde qui joint le point m à un point voisin pris sur la courbe; mN la perpendiculaire à cette corde. Si l'on désigne en général par ε^2 un infiniment petit du second ordre, et par $\Delta r_1, \Delta r_2, \ldots$, les accroissements (positifs ou négatifs) des coordonnées focales $r_1, r_2, \ldots$, dans le passage du point m au point voisin m' de la courbe, on sait qu'il existe entre ces accroissements la relation

$$(3) \qquad a_1 \Delta r_1 + a_2 \Delta r_2 + \ldots + \varepsilon^2 = 0.$$

On trouve facilement d'ailleurs les expressions

$$\Delta r_1 = \overline{mm'}.\sin \mathrm{N}mf_1 + \varepsilon_1^2,$$
$$\Delta r_2 = \overline{mm'}.\sin \mathrm{N}mf_2 + \varepsilon_2^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui fournissent, *en grandeur et en signe*, les valeurs de $\Delta r_1, \Delta r_2, \ldots$, pourvu que l'on regarde *les sinus qui entrent dans ces expressions comme positifs ou négatifs, suivant que les angles correspondants tombent à gauche ou à droite de la perpendiculaire* mN. Substituant ces valeurs dans la relation (3) et divisant tous les termes par $\overline{mm'}$, il vient

$$(4) \qquad a_1 \sin \mathrm{N}mf_1 + a_2 \sin \mathrm{N}mf_2 + \ldots + \varepsilon = 0.$$

Or si l'on suppose maintenant que le point m' se rapproche indéfiniment du point m, la perpendiculaire mN à la corde mm' se rapprochera indéfiniment de la normale cherchée mn, et en même temps ε tendra

vers zéro, on aura donc, en passant à la limite,

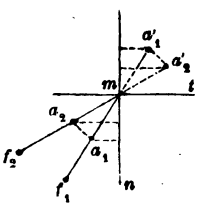
$$(5) \qquad a_1 \sin nmf_1 + a_2 \sin nmf_2 + \ldots = 0.$$

Cette relation, dans laquelle a_1, a_2... sont des nombres connus, pouvant être positifs ou négatifs, conduit facilement à la construction de la normale. Car un terme quelconque du premier membre, $a_1 \sin nmf_1$, par exemple, représente, en grandeur et en signe, le moment par rapport à la normale mn d'un poids égal à la valeur absolue de a_1, situé à une distance égale à l'unité du point m, sur le rayon mf_1 si a_1 est positif, ou sur son prolongement $f_1 m$, si a_1 est négatif. La relation (5) exprime donc que la somme algébrique des moments, par rapport à la normale mn, de tous les poids a_1, a_2... situés comme nous venons de le dire, est égale à zéro; et par suite, que la normale mn passe par le centre de gravité de ces poids. On a donc cette construction :

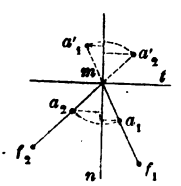
Joindre le point décrivant à chaque foyer tel que f_k; sur la droite résultante, si le nombre a_k est positif, ou sur son prolongement s'il est négatif et à une même distance du point m, placer un poids égal à la valeur numérique de a_k; chercher enfin le centre de gravité de ces poids et le joindre au point m par une droite qui est la normale cherchée. (*Analyse des infiniment petits* du marquis DE L'HÔPITAL, prop. 10.)

Observation. — Il est facile de voir que, dans la construction précédente, les signes des différents termes de la relation (5) sont reproduits avec fidélité par les signes des moments, par rapport à la normale, des poids correspondants. Considérons, en effet, les termes $a_1 \sin nmf_1$ et $a_2 \sin nmf_2$.

1°. Si les sinus sont de même signe, ainsi que les nombres a_1 et a_2, les termes considérés auront le même signe dans la relation (5). Or les sinus ayant le même signe, les rayons mf_1, mf_2 sont, d'après une observation faite plus haut, situés du même côté de la normale mn; et, les nombres a_1, a_2 ayant le même signe, les poids a_1, a_2 sont, d'après la construction, situés tous deux sur les rayons mf_1, mf_2 eux-mêmes (si a_1 et a_2 sont positifs), ou tous deux sur leurs prolongements $f_1 m$, $f_2 m$ (si a_1 et a_2 sont négatifs). Les poids a_1, a_2 sont donc, dans tous les cas, situés du même côté de la normale mn, et leurs moments sont de même signe, ainsi que les termes correspondants de la relation (5).



2°. De même, si les sinus sont de signes contraires et les nombres a_1, a_2 de même signe, les termes considérés seront de signes contraires dans la relation (5). Or, les sinus étant de signes contraires, les rayons mf_1, mf_2 sont situés de part et d'autre de la normale mn; et les nombres a_1, a_2 étant de même signe, les poids a_1, a_2 sont situés en même temps sur les rayons eux-mêmes, ou sur leurs prolongements. Ces poids sont donc, dans



tous les cas, situés de part et d'autre de la normale mn, et leurs moments, par rapport à cette droite, sont de signes contraires, ainsi que les termes correspondants de la relation (5); etc., etc.

Corollaire I. — La construction précédente est encore applicable au cas où le mouvement du point décrivant m est défini par la relation qui existe entre les distances de ce point à plusieurs courbes fixes C_1, C_2,..., ces distances étant comptées sur les normales à ces courbes menées par le point m. On démontre aisément, en effet, que la tangente en m au lieu considéré est la même que la tangente à la courbe auxiliaire que décrirait un second mobile partant du point m et se mouvant d'après cette condition, qu'entre les distances de ce point aux pieds actuels des normales abaissées du point m sur les courbes données, *considérés comme des points fixes*, il existe une relation identique à la première relation donnée.

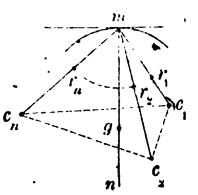
Corollaire II. — La construction de la tangente d'un lieu géométrique déterminé, dont l'espèce est encore inconnue, permet quelquefois de découvrir la nature de ce lieu. Ce résultat est d'ailleurs un accident géométrique heureux, ne se produisant guère que dans le cas où la courbe inconnue est une circonférence. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de *construire la tangente à la courbe, lieu des points m, tels que la somme des carrés des tangentes menées de chacun d'eux à* n *circonférences situées dans le même plan, ait une valeur constante*. Si l'on désigne par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les distances de l'un des points du lieu m, aux centres $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des circonférences données, on aura, entre ces distances et leurs différentielles, les relations

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = \text{constante}$$

et

$$r_1 \cdot dr_1 + r_2 \cdot dr_2 + \ldots + r_n \cdot dr_n = 0.$$

On devra donc, pour construire la normale, joindre le point m au centre de gravité des poids $r_1, r_2, \ldots, r_n$ appliqués à la même distance du point m sur les droites mc_1, $mc_2, \ldots, mc_n$. Or, le moment, par rapport à une droite quelconque issue du point m, du poids r_k est égal au moment par rapport à la même droite d'un poids auxiliaire égal à l'unité et qui serait placé en c_k (on suppose $\overline{mr_1} = \overline{mr_2} = \ldots = 1$). Il en résulte que le centre de gravité G des poids $r_1, r_2, \ldots, r_n$ et le centre de gravité g des centres $c_1, c_2, \ldots, c_n$ considérés comme des points matériels égaux, sont situés sur une même droite passant par le point m. Donc la normale à la courbe décrite par le point m passe à chaque instant par le centre des moyennes distances des points $c_1, c_2, \ldots, c_n$, centres des circonférences données. La courbe décrite par le point m est donc une circonférence, et le centre de cette circonférence se trouve en même temps déterminé.

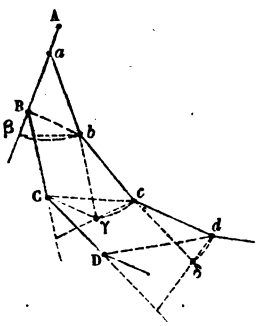


Remarque. — Le problème général que nous venons de résoudre fut

proposé par de Tschirnhausen (*Medicinæ mentis pars secunda*, p. 74) et généralisé par Fatio de Duillier, qui rectifia en même temps la solution erronée du premier (*Biblioth. univ. et hist.*, t. V, 1687, p. 25).

2. *Soit un polygone funiculaire plan* ABCD... *reliant des points matériels de masses respectives* a, b, c, d,..., *placés aux sommets successifs du polygone. Le dernier sommet du polygone se meut sous l'influence d'une certaine force et entraîne dans son mouvement le polygone tout entier. Cela posé, on demande, pour chaque position du polygone mobile, les tangentes aux courbes décrites par ses différents sommets.*

Solution. — Soient ABCD..., *abcd*... deux positions infiniment voisines du polygone mobile, et Aa, Bb, Cc,... les chemins élémentaires décrits par ses différents sommets dans le passage de la première à la deuxième position; le chemin Aa en particulier étant évidemment dirigé suivant AB. Par chacun des sommets $a, b, c, \ldots$, menons les droites $a\beta$, $b\gamma$, $c\delta$, ..., égales et parallèles à AB, BC, CD, ..., et égales par suite, à ab, bc, cd, ...; et joignons $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$,..., qui iront rencontrer, sous des angles infiniment peu différents d'un angle droit, les prolongements des côtés AB, BC, CD,.... Nous désignerons par B, C, D, E,... les angles du polygone ABCDE...; par $\widehat{d}$, $\widehat{d'}$ les angles aigus que forme le chemin élémentaire Dd, avec les côtés adjacents DC (pour $\widehat{d}$) et DE (pour $\widehat{d'}$), et de même en chacun des autres sommets.



Tout cela posé, si nous désignons d'abord par $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, ... les forces (provenant, par l'intermédiaire des côtés du polygone, de la force qui sollicite le dernier sommet) qui font décrire aux masses a, b, c, d,... les chemins élémentaires Aa, Bb, Cc,... dans le même temps θ, nous aurons cette première série d'égalités

$$(1) \qquad \frac{f(a)}{a.\mathrm{A}a} = \frac{f(b)}{b.\mathrm{B}b} = \frac{f(c)}{c.\mathrm{C}c} = \frac{f(d)}{d.\mathrm{D}d} = \ldots$$

(Car si l'on désignait par $g_{(a)}, g_{(b)}, \ldots$, les accélérations dues aux forces $f(a)$, $f(b)$, ..., on aurait d'abord

$$f(a) = a.g_{(a)} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}a = g_{(a)}\frac{\theta^2}{2},$$

d'où l'on déduirait

$$\frac{f(a)}{a.\mathrm{A}a} = \frac{2}{\theta^2}, \text{ etc.)}$$

Désignons *en second lieu* par F(A), F(B), F(C), F(D),... les forces agissant suivant AB, BC, CD, DE.... On voit immédiatement que F(A) $= f(a)$;

que F(B) a pour composantes F(A) et $f(b)$; que F(C) a pour composantes F(B) et $f(c)$, et ainsi de suite; on aura donc, en employant la notation indiquée plus haut, les relations suivantes, qui ont lieu en chacun des sommets A, B, C, D,....,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} (A) & F(A) = f(a); \\ (B) & \dfrac{F(A)}{\sin b'} = \dfrac{f(b)}{\sin B} = \dfrac{F(B)}{\sin b}; \\ (C) & \dfrac{F(B)}{\sin c'} = \dfrac{f(c)}{\sin C} = \dfrac{F(C)}{\sin c}; \\ (D) & \dfrac{F(C)}{\sin d'} = \dfrac{f(d)}{\sin D} = \dfrac{F(D)}{\sin d}; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En troisième lieu, les triangles infinitésimaux $Bb\beta$, $Cc\gamma$, $Dd\delta$,..., dans lesquels les côtés $b\beta, c\gamma, d\delta$,..., font avec les lignes AB, BC, CD,..., des angles infiniment peu différents d'un angle droit, nous fournissent les relations suivantes :

1°. Le triangle $Bb\beta$:

$$\frac{B\beta}{Bb} \quad \text{ou} \quad \frac{Aa}{Bb} = \frac{\sin Bb\beta}{\sin b\beta B} = \frac{\cos ABb}{1} = \frac{\cos b}{1};$$

2°. Le triangle $Cc\gamma$:

$$\frac{C\gamma}{Cc} \quad \text{ou} \quad \frac{Bb}{Cc} = \frac{\sin Cc\gamma}{\cos(Bb, BC)} = \frac{\cos BCc}{\cos bBC} = \frac{\cos c}{\cos b'};$$

et ainsi de suite; et en réunissant toutes ces formules, on a

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} 1. & \dfrac{Aa}{Bb} = \dfrac{\cos b}{1}; \\ 2. & \dfrac{Bb}{Cc} = \dfrac{\cos c}{\cos b'}; \\ 3. & \dfrac{Cc}{Dd} = \dfrac{\cos d}{\cos c'}; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Le problème est actuellement résolu, car il ne reste plus qu'à combiner les relations (1), (2) et (3), pour obtenir les directions Bb, Cc, Dd,.... On trouve ainsi les formules cherchées :

$$(x)\quad \left\{\begin{array}{ll} 1. & \dfrac{\sin b'}{\cos b} = \dfrac{a}{b}\sin B; \\ 2. & \dfrac{\sin c'}{\cos c} = \dfrac{b}{c}\,\dfrac{\sin b}{\cos b'}\cdot\dfrac{\sin C}{\sin B}; \\ 3. & \dfrac{\sin d'}{\cos d} = \dfrac{c}{d}\,\dfrac{\sin c}{\cos c'}\cdot\dfrac{\sin D}{\sin C}. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Remarque. — On trouve dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hôpital (section 2, prop. 16), une solution de ce problème, moins générale que la précédente.

CHAPITRE II.

Des courbes enveloppes.

§ I. — Solution du problème général.

38. *Enoncé du problème général. — Application de la méthode par les solides auxiliaires, à la recherche de l'équation de la courbe enveloppe.*

Problème général. — Soit donnée une famille de courbes, renfermant une infinité de lignes qui se succèdent d'une manière *continue* dans le même plan. Regardant l'une de ces lignes L comme fixe, considérons une ligne L' très-voisine de la première; elle coupera en général celle-ci en des points qui tendront vers certains points-limites déterminés, à mesure que la ligne L' se rapprochera de plus en plus de la ligne fixe L, en coïncidant successivement avec chacune des lignes intermédiaires. Cela posé, on propose : 1° de trouver les points-limites dont il s'agit, pour l'une quelconque des courbes considérées; 2° de trouver le lieu géométrique formé par les points-limites de toutes ces courbes, ou l'*enveloppe* de ces courbes.

Solution. — Soit l'équation

$$(1) \qquad f(x, y, c) = 0,$$

dans laquelle c représente un paramètre arbitraire qui, en variant d'une manière continue dans l'équation (1), donne naissance à une série de courbes se succédant d'une manière continue. Attribuons au paramètre c une signification géométrique; regardons-le comme exprimant la troisième coordonnée z, d'un point de la surface représentée par l'équation

$$(2) \qquad f(x, y, z,) = 0.$$

Les courbes considérées (1) seront alors les projections, sur le plan des xy, des diverses sections de la surface (2), parallèles à ce plan.

Dès lors, si deux de ces courbes, correspondant aux valeurs c et $c + \Delta c$ du paramètre, se coupent en un point m_0, la parallèle à l'axe des z menée par ce point coupera la surface en deux points M_0 et M'_0 situés dans les plans $z = c$ et $z = c + \Delta c$; la distance de ces points étant très-petite, si Δc est lui-même très-petit.

Si donc on suppose que Δc tende vers zéro, le point m_0 se rapprochera de plus en plus de l'un des points m de la courbe enveloppe, et la parallèle à l'axe des z, menée par le point variable m_0, tendra de plus en plus à devenir tangente à la surface (2).

Il en résulte immédiatement que l'enveloppe cherchée n'est autre chose que la trace, sur le plan des xy, du cylindre circonscrit à la surfac

parallèlement à l'axe des z. On en conclut, d'après la forme connue de l'équation du plan tangent, que l'équation de la courbe enveloppe sera fournie par l'élimination de z entre les deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad \frac{df(x, y, z)}{dz} = 0,$$

ou encore par l'élimination de c entre celles-ci :

$$(3) \qquad f(x, y, c) = 0, \quad \frac{df(x, y, c)}{dc} = 0.$$

D'ailleurs, les coordonnées du point de l'enveloppe situé sur l'une des courbes proposées s'obtiendraient en remplaçant dans les équations (3) c par la valeur particulière qui caractérise cette courbe, et les résolvant par rapport à x et à y.

Remarque I. — La solution précédente dépend, comme on le voit, de la méthode par les solides auxiliaires. Elle présente l'avantage de mettre très-simplement en lumière cette importante propriété, d'après laquelle la courbe enveloppe d'une série de lignes est tangente à chacune d'elles.

Soit en effet m un point commun à l'enveloppe et à celle des lignes données, amb, qui correspond à la valeur c_1 du paramètre. Menons par le point m une parallèle à l'axe des z qui touche la surface en M; par le point M menons le plan $z = c_1$, qui coupe la surface (2) suivant la courbe AMB dont la projection sur le plan xy est la ligne amb.

La tangente en M à la première est située dans le plan tangent en M, lequel est parallèle à l'axe des z. La projection de cette tangente, c'est-à-dire la tangente en m à la ligne amb, sera donc la trace du plan tangent sur le plan xy, c'est-à-dire la tangente en m à la courbe enveloppe.

Remarque II. — Il peut arriver que l'enveloppe coïncide avec l'une des lignes enveloppées, c'est-à-dire que l'équation de l'enveloppe puisse se déduire de l'équation générale des enveloppées, en attribuant une valeur numérique convenable au paramètre c (*). C'est ce qui arrivera toutes les fois que la courbe de contact du cylindre parallèle à oz et circonscrit à la surface (2), sera plane et parallèle à xy; et, dans ce cas, la combinaison des deux équations du système (3) devra conduire à une valeur numérique de c, indépendante de x et de y.

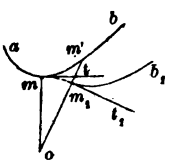
39. *Enveloppe d'une ligne de forme et de grandeur invariables qui se meut dans son plan.*

THÉORÈME. — *Le point où une ligne, de forme et de grandeur invariables, se mouvant dans son plan suivant une loi déterminée, touche son enveloppe, est le pied de la normale à cette ligne, menée par le centre instantané de rotation correspondant à la position actuelle de la ligne mobile.*

(*) *Calcul infinitésimal* de M. Cournot, tome I, page 330.

Démonstration. — Observons d'abord que si l'on a deux courbes amb, $a'mb$, infiniment voisines et se coupant, par suite, sous un angle infiniment petit en m, la distance aa' de deux points de ces courbes sera ou finie, ou infiniment petite du premier ordre, si les points a et a' sont situés à des distances finies du point m; la distance aa' sera, au contraire, un infiniment petit du second ordre, si ces points sont situés à des distances infiniment petites du point m. C'est ce que montre la considération du triangle rectiligne ama' : car, dans le premier cas, les côtés am, $a'm$ de ce triangle sont finis, et l'angle ama' est fini ou infiniment petit; et, dans le second cas, les côtés am, $a'm$ sont infiniment petits, ainsi que l'angle ama'.

Cela posé, du centre instantané de rotation o, correspondant à la position actuelle amb de la ligne mobile, menons la normale om à cette ligne. Le mouvement élémentaire de la ligne mobile, par lequel elle passe à la position infiniment voisine $a_1m_1b_1$, est un mouvement de rotation autour du point o par lequel le point m, en particulier, décrit le petit arc mm_1, ayant même tangente mt en m, que la ligne amb. Joignons om_1 qui, prolongée, coupe en t et en m' la tangente mt et la courbe amb. D'après le principe précédent, chacune des distances m_1t, tm' est un infiniment petit du deuxième ordre, et leur somme, c'est-à-dire la distance m_1m', est du même ordre : les points m_1, m' sont donc, d'après le principe précédent, infiniment voisins du point d'intersection des deux lignes, amb, $a_1m_1b_1$. Il en est donc de même du point m; ce qui veut dire que le point m est le point suivant lequel la ligne mobile touche son enveloppe.



Remarque. — Ce théorème trouve son application dans la théorie géométrique des engrenages.

§ II. — Étude du problème dans le cas spécial ou les lignes dont on cherche l'enveloppe sont des lignes droites.

40. 1). Le problème ayant pour objet de déterminer l'enveloppe d'une série de droites se succédant d'une manière continue a été posé et résolu, pour la première fois, par Huyghens dans son *Horologium oscillatorium*, pour le cas le plus important où les droites considérées sont les diverses normales d'une courbe donnée, l'enveloppe recevant, dans ce cas spécial, le nom de *développée* de la courbe.

Dans la troisième partie de cet ouvrage, ayant pour titre *De linearum curvarum evolutione et dimensione*, Huyghens construit successivement les développées de la cycloïde, de la parabole et des coniques à centre (propositions 5, 8, 10, pages 66, 69, 79); il établit ce théorème important que la développée d'une courbe géométrique est rectifiable (prop. 11, page 81) et applique cette théorie naissante à plusieurs problèmes étrangers à notre sujet.

Dans l'exposition de ces belles découvertes, Huyghens adopte la marche synthétique des anciens : pour la cycloïde, par exemple, il démontre que si l'on construit une seconde courbe égale à la première et ayant avec elle certaines relations de position, les tangentes de cette seconde cycloïde se trouveront normales à la première, dont elle est, par conséquent, la développée.

Plus tard, Newton généralisa l'élégant théorème d'Huyghens, en établissant que la développée d'une épicycloïde est une seconde épicycloïde, semblable à la première. (*Philosophiæ naturalis principia...*, prop. 50.)

De Tschirnhausen ouvrit ensuite la voie à de nouvelles spéculations géométriques en considérant la courbe enveloppe d'une série de rayons lumineux réfléchis par une ligne *dirimante*, et correspondant à des rayons incidents parallèles (*Acta Lipsiæ*, novemb. 1682). Ces nouvelles courbes reçurent le nom de *caustiques par réflexion*, et furent étudiées par Delahire, Leibnitz (*Acta L.*, janv. 1689), et Jean Bernoulli (janv. 1692). Enfin, Jean Bernoulli, considérant les caustiques par réfraction, donna la construction géométrique du point où chaque rayon réfracté touche son enveloppe (juin 1693), et le marquis de l'Hôpital (*Analyse des inf. petits*, proposition 1, sections 6 et 7) substitua à ces constructions deux formules qui ont été reproduites par Petit et ont conservé son nom. (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome II, page 354.)

2). Revenons au problème proposé. Il suffit évidemment, pour le résoudre, de déterminer le point où chacune des droites données est rencontrée par la droite infiniment voisine; car ce point d'intersection étant défini géométriquement, il ne restera plus qu'à trouver le lieu géométrique de tous les points semblables, ce qui sera une pure question de géométrie ou d'analyse ordinaire, plus ou moins facile d'ailleurs.

Or on trouve, dans le *Traité des Fluxions* de Maclaurin, l'indication d'une méthode qui s'adapte parfaitement au problème actuel, et qui présente d'assez intimes analogies avec celle de Roberval pour la description des tangentes. On peut lui donner le nom de *méthode par la comparaison des vitesses angulaires*, et elle s'applique avec une égale facilité aux deux cas distincts que peut présenter le problème.

Premier cas. — *Le mouvement de la droite variable est défini : 1° par le mouvement de l'un de ses points, a, qui est donné; 2° par le mouvement angulaire* correspondant *de la droite*, ce dernier mouvement étant rapporté à une droite fixe.

Solution. — Soient ab, $a'b'$ les deux positions infiniment voisines de la droite mobile et o leur point d'intersection; aa' l'élément du chemin parcouru par le point *directeur* a, et $\widehat{\omega}$ l'angle infiniment petit dont la direction de la droite a varié, dans le passage de sa première à sa seconde position. Désignons par $\widehat{a}$ l'angle sous lequel la droite ab coupe la ligne aa' décrite par le point directeur. On connaît par hypothèse la limite du rapport du mouvement angulaire de la droite ab au mouvement linéaire du

point a, c'est-à-dire lim. $\frac{\omega}{aa'}$. Or le triangle infiniment petit oaa' nous fournit une seconde expression du même rapport, à savoir :

$$\frac{\sin\omega}{aa'} = \frac{\sin\widehat{a}}{oa'},$$

d'où, en passant à la limite,

$$\lim.\frac{\omega}{aa'} = \frac{\sin\widehat{a}}{oa},$$

d'où

$$\text{(I)} \qquad oa = \sin\widehat{a}\,\lim.\frac{aa'}{\omega}.$$

On n'aura donc, dans chaque cas particulier, qu'à déterminer, d'après les données de la question, la limite du rapport du mouvement rectiligne du point a au mouvement angulaire de la droite ab, pour avoir résolu le problème.

Second cas. — *Le mouvement de la droite ab est défini par les mouvements simultanés de deux de ses points a et b.*

Solution. — Soient aa', bb' les chemins simultanément décrits par les deux points directeurs; $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ les angles sous lesquels la droite ab coupe les lignes aa', bb', et o le point d'intersection des deux droites. Désignons toujours par ω le mouvement angulaire de la droite, dans le passage de sa première à sa seconde position; appliquant la formule (I) à chacun des triangles oaa', obb', il vient

$$oa = \sin\widehat{a}\,\lim.\frac{aa'}{\omega}, \quad ob = \sin\widehat{b}\,\lim.\frac{bb'}{\omega},$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\text{(II)} \qquad \frac{oa}{ob} = \frac{\sin\widehat{a}}{\sin\widehat{b}}\lim.\frac{aa'}{bb'}.$$

41. *Applications de la théorie précédente.*

1. Théorème. — *L'enveloppe du rayon du cercle générateur qui aboutit au point décrivant d'une épicycloïde, est une seconde épicycloïde.*

Démonstration. — Soit o la limite du point d'intersection des deux positions infiniment voisines am et $a'm'$ du rayon qui aboutit au point décrivant du cercle générateur, on aura, d'après la formule (I) du numéro précédent,

$$\text{(1)} \qquad oa = \sin\widehat{a}\,\lim.\frac{aa'}{\omega} = \cos oat\,\lim.\frac{aa'}{\omega}.$$

D'ailleurs aa' et ω peuvent s'exprimer l'un et l'autre au moyen de

l'angle $\gamma = t\widehat{c}t'$, dont le cercle générateur a tourné autour du point c, en passant de a en a'. Car si r, r' désignent les rayons du cercle fixe et du cercle mobile, on a d'abord

$$(2) \qquad aa' = (r + r')\gamma;$$

et si l'on prend sur le cercle mobile l'arc auxiliaire $u'm_1 = um$, que l'on joigne $a'm_1$, on voit que l'angle $\omega = \widehat{\overline{am}, \overline{a'm'}}$, se compose de deux parties : la première est l'angle $\widehat{\overline{am}, \overline{a'm_1}} = \widehat{\overline{au}, \overline{a'u'}} = \gamma$;

La seconde est l'angle $\widehat{m_1 a' m'}$; et comme l'arc $m_1 m'$ est égal en longueur à l'arc tt', on a $m_1\widehat{a'}m' = \gamma \frac{r}{r'}$. On a donc enfin

$$(3) \qquad \omega = \gamma + \gamma . \frac{r}{r'} = \gamma . \frac{r + r'}{r'},$$

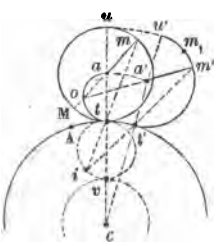
et, en substituant les valeurs (2) et (3) dans (1), il vient

$$oa = r' \cos oat = \overline{at} . \cos oat,$$

ce qui montre que le point o est le pied de la perpendiculaire abaissée du point t sur le rayon oa.

Cela posé, sur at, comme diamètre, décrivons une circonférence qui passe par o; et soit M le point du cercle générateur primitif, diamétralement opposé au point décrivant m. On aperçoit facilement que l'arc to, de la circonférence aot, est de même longueur que l'arc tM de la circonférence uMt. Or, le point m décrivant une épicycloïde, le point M, qui lui est diamétralement opposé, décrit une seconde épicycloïde égale à la première, et ayant son origine quelque part en A sur la circonférence fixe, de sorte que l'arc tM est équivalent à l'arc tA; par suite, l'arc to est équivalent à l'arc tA, et le point o décrit une épicycloïde ayant pour origine le point A. C. Q. F. D.

Remarque — Si nous n'avions voulu appliquer les méthodes du numéro précédent, nous aurions pu parvenir immédiatement à la connaissance du point o où chaque rayon am touche son enveloppe. Il suffirait en effet de remarquer que le point t est le centre instantané de rotation autour duquel s'effectue le mouvement élémentaire du cercle mobile umt, dans son passage à la position infiniment voisine $u'm't'$; et que par suite le point où le rayon am, invariablement lié au cercle mobile, touche son enveloppe, est précisément, d'après le théorème du n° 39, le pied de la perpendiculaire abaissée du point t sur ce rayon.



2. Problème. — *Trouver la développée de l'épicycloïde.*

Solution. — Première partie. — Cherchons d'abord le point où chaque

normale tm touche son enveloppe; et soit, en conservant la même figure et les mêmes notations que précédemment, i le point d'intersection des deux normales infiniment voisines mt, $m't'$.

La formule (I) du numéro précédent nous donnera

$$(1) \qquad it = \sin itt' \lim. \frac{tt'}{\omega}.$$

Cherchons les expressions respectives de tt' et de ω en fonctions de $\gamma = \widehat{tct'}$. On a d'abord

$$(2) \qquad tt' = r.\gamma.$$

Quant à $\omega = \widehat{\overline{mt}, \overline{m't'}}$, on a, en prenant toujours l'arc auxiliaire $u'm_1 = um$,

$$\omega = \widehat{\overline{mt}\,\overline{m_1t'}} + \widehat{m_1t'm'} = \gamma + \frac{1}{2}\widehat{m_1a'm'} = \gamma + \frac{1}{2}\gamma.\frac{r}{r'} = \gamma.\frac{2r'+r}{2r'}.$$

Ainsi

$$(3) \qquad \omega = \gamma.\frac{2r'+r}{2r'}.$$

Portant les valeurs (2) et (3) dans la formule (1), il vient

$$\frac{it}{\cos itc} = \frac{2rr'}{r+2r'}.$$

SECONDE PARTIE. — *Lieu géométrique du point i, ou développée.*

Menons par le point i, iv perpendiculaire à itm et rencontrant en v le rayon ct, on aura

$$(a) \qquad tv = \frac{it}{\cos itc} = \frac{2rr'}{r+2r'}.$$

Sur la droite tv comme diamètre, décrivons une circonférence qui passera par i, et qui sera tangente en v à la circonférence décrite du point c comme centre avec cv pour rayon; le rayon cv de cette dernière circonférence a pour expression

$$(b) \qquad cv = r - vt = r\left(1 - \frac{2r'}{r+2r'}\right) = \frac{r^2}{r+2r'}.$$

Des relations (a) et (b) on déduit

$$\frac{cv}{vt} = \frac{r^2}{2rr'} = \frac{r}{2r'},$$

ou

$$(c) \qquad \frac{cv}{vt} = \frac{ct}{tu}.$$

Cette formule montre que le système des circonférences de rayons cv et $\frac{1}{2}vt$ est semblable au système des circonférences données de rayons r et r'.

Si donc nous concevons menée, par le point v, vn parallèle à la droite tm et terminée à la circonférence tiv, le point n décrira une épicycloïde semblable à celle qui est décrite par le point m, et semblablement placée. Le point i, diamétralement opposé au point n sur la même circonférence, décrira donc pareillement une épicycloïde semblable à celle décrite par le point m, mais non semblablement placée. C. Q. F. T.

3. *Problème des caustiques par réfraction.*

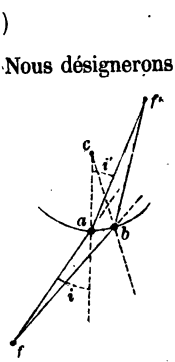
Notation. — Soient ab la courbe *dirimante* qui sépare les deux milieux, et f l'origine des rayons lumineux; fa, fb deux rayons incidents infiniment voisins; ac, bc les normales aux points d'incidence a, b, se coupant en c; af', bf' les rayons réfractés (réels ou virtuels) se coupant en f'. Nous désignerons en outre par i, $i+di$ les angles aigus d'incidence en a, b; par i', $i'+di'$ les angles de réfractions correspondants et par n l'indice de réfraction, de sorte que l'on aura

$$\sin i = n.\sin i',$$

et, par suite,

$$\cos i.di = n\cos i'.di'. \tag{1}$$

Nous désignerons ac par ρ; af, af' par r, r', *et nous regarderons r, r' comme positifs ou négatifs, suivant que les droites af, af' tomberont dans la concavité ou dans la convexité de la courbe.* Enfin, en appelant c, f, f' les angles infiniment petits acb, afb, $af'b$ (c'est-à-dire les arcs qui les mesurent dans la circonférence dont le rayon est l'unité), nous aurons



$$c = \frac{ab}{\rho}, \quad f = \pm\frac{ab}{r}\cos i, \quad f' = \pm\frac{ab}{r'}\cos i';$$

le signe $\pm$ ayant pour objet de rendre positifs, dans tous les cas, les facteurs $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$.

Tout cela posé, il s'agit de déterminer le point f' suivant lequel chaque rayon réfracté touche son enveloppe, ou, plus généralement, de trouver la relation qui existe entre ρ, r, r', i, i' et n.

Premier cas. — Le point f est situé dans la convexité de la courbe. (Le nombre r est alors négatif, et l'on doit écrire $f = -\frac{ab}{r}\cos i$.)

Egalons d'abord à zéro la différence des angles des triangles fac, fbc, il vient en simplifiant (et supposant, ce qui est permis, $fa < fb$),

$$di = c + f = ab\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos i}{r}\right). \tag{2}$$

Egalons de même à zéro la différence des angles des triangles $f'ac$, $f'bc$:

1°. Si le point f' est situé dans la concavité de la courbe comme dans la

figure, on trouve facilement

$$(3) \qquad di' = c - f' = ab\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos i'}{r'}\right),$$

car, r étant positif dans le cas actuel, on a

$$f' = +\frac{ab}{r'}\cos i'.$$

2°. Si le point f' est situé dans la convexité de la courbe, comme le point f, on a, comme pour ce point,

$$di' = c + f' = ab\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos i'}{r'}\right),$$

car, r' étant négatif, on a

$$f' = -\frac{ab}{r'}\cos i'.$$

L'expression définitive de di' est donc la même dans les deux cas; et si l'on substitue les valeurs de di, di' données par les formules (2) et (3) dans la relation (1), il vient, en divisant par ab,

$$(1) \qquad \cos i\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos i}{r}\right) = n\cos i'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos i'}{r'}\right).$$

Second cas. — Le point f est situé dans la concavité de la courbe. Le nombre r est donc positif, et l'on a

$$f = \frac{ab}{r}\cos i.$$

On aura d'abord pour le point f (en supposant toujours $fa < fb$),

$$di = f - c,$$

que l'on déduit de la formule (3) $di' = c - f'$, en renversant l'ordre des soustractions (cette inversion étant due à ce que, le point f' auquel se rapportait la formule (3) étant situé dans la concavité comme le point actuel f, on avait pour ce point $f'a > f'b$, tandis qu'on suppose actuellement $fa < fb$). On peut l'écrire

$$(2') \qquad di = -(c - f) = -ab\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos i}{r}\right).$$

Quant au point f',

1°. Si ce point est situé dans la convexité de la courbe, on aura d'abord

$$di' = -(c + f'),$$

que, pour des raisons semblables, on déduit de la relation (2) en y changeant le signe de di; et enfin en remarquant que r' est négatif,

$$(3') \qquad di' = -(c + f') = -ab\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos i'}{r'}\right).$$

2°. Si le point f' est au contraire dans la concavité de la courbe, il sera placé de la même manière que le point f auquel se rapporte la formule (2'); et, en remarquant que r' est devenu positif, on retrouvera encore la formule (3').

Enfin, si l'on substitue dans la relation (1) les valeurs de di, di' données par les formules (2'), (3'), on retrouve évidemment la formule (I) qui s'applique, par conséquent, à tous les cas.

Il résulte immédiatement d'ailleurs des conventions déjà faites sur les signes de r, r', que, si la résolution de l'équation (I) fournit pour r' une valeur positive ou négative, le point cherché f' sera situé sur la portion du rayon réfracté qui tombe dans la concavité de la courbe, ou, au contraire, sur son prolongement.

Corollaire. — Si l'on remplace dans la formule (I) n par -1, et i' par i, on obtient la formule analogue pour les caustiques par réflexion

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{\rho} = \cos i \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right);$$

et l'on pourra, au moyen de cette formule, déterminer r', si ρ et r sont connus; ou, suivant une observation de Jean Bernoulli, ρ lui-même, si r, r' sont connus, ainsi que cela arrive pour l'ellipse rapportée à ses foyers.

4. *Définition et construction des caustiques secondaires de M. Quetelet. — Des ovales de Descartes.*

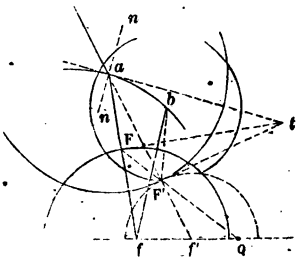
La détermination de la caustique par réfraction, c'est-à-dire du lieu géométrique des points d'intersection de deux rayons réfractés successifs, qui sont définis isolément par la formule précédente, présente en général de grandes difficultés. Or on peut fréquemment les éviter d'une manière très-heureuse, en substituant à la recherche de la caustique la recherche de l'une de ses développantes, puisqu'il est évident d'ailleurs que la connaissance de celle-ci suffit à la définition géométrique de la caustique elle-même. L'auteur de cette ingénieuse substitution, M. Quetelet, a donné à la développante de la caustique principale le nom de *caustique secondaire*, et voici, d'après ce géomètre, la construction générale de cette dernière.

Que du point lumineux f comme centre, on décrive une circonférence de rayon arbitraire, et que de chaque point a de la ligne dirimante comme centre on décrive un cercle dont le rayon soit à la distance de ce point à la circonférence f, dans le rapport constant de 1 à n (n désignant l'indice de réfraction); l'enveloppe de tous les cercles ainsi obtenus sera la caustique secondaire.

Démonstration. — Il faut, pour établir cette construction, faire voir que les rayons réfractés sont normaux à l'enveloppe dont il s'agit, ou montrer, inversement, que les normales de l'enveloppe coïncident avec les rayons réfractés. Donc, si l'on observe qu'en général les normales à l'enveloppe sont aussi normales aux lignes enveloppées, il suffira d'établir que pour chacun des cercles considérés, a par exemple, le rayon de ce cercle

qui aboutit au point où il touche son enveloppe, est précisément le rayon réfracté correspondant au rayon incident en a.

Soient, à cet effet, a et b les centres infiniment voisins de deux des cercles considérés, F′ un de leurs points d'intersection; joignons $F'a$, $F'b$; fa, fb; posons $fa = r$, $F'a = R$, et désignons par i, i' les angles d'incidence et de réfraction en a, et par I la limite de l'angle que $\overline{aF'}$ fait avec la normale à la courbe dirimante en a.



Les triangles fab, $F'ab$ donnent ces relations,

$$fa - fb = \Delta r = \overline{ab} \cos \widehat{fa, ab},$$

d'où, en passant à la limite,

$$\frac{dr}{ds} = \sin i;$$

et, de même,

$$\frac{dR}{ds} = \sin I.$$

De là, en divisant membre à membre, et observant qu'en vertu de la construction

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{n},$$

il vient

$$\sin i = n . \sin I,$$

et par suite $I = i'$, ce qui suffit à la démonstration.

Corollaire. — Le théorème précédent conduit très-simplement à l'une des définitions géométriques des ovales de Descartes, c'est-à-dire *des lignes qui ont la propriété de réfracter vers un foyer donné f' les rayons lumineux émanant d'un point donné*. Car, si la ligne ab possède cette propriété, la caustique secondaire, qui est coupée à angles droits par les rayons réfractés, lesquels vont concourir en f', ne peut être qu'une circonférence ayant pour centre le point f'. Dès lors, le rayon de chacune des circonférences ayant pour centre l'un des points a de la ligne dirimante cherchée, est égal à la distance du point a à la circonférence f'. Mais, d'après la construction générale, ce même rayon est à la distance du même point a à une circonférence ayant pour centre le foyer f dans le rapport de 1 à n. Donc l'ovale cherchée est le lieu géométrique des points dont les distances à deux circonférences ayant pour centres le point lumineux f et le foyer f', sont dans la raison constante des nombres n et 1.

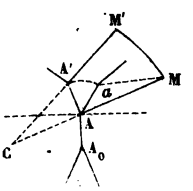
Observation. — Les droites fa, $f'a$ coupant en F, F′ les circonférences f, f', si l'on mène les droites indéfinies FF′, ff' qui se coupent en o, le théorème de Ptolémée (Ire Partie, page 15), appliqué au triangle $fa f'$ coupé par la transversale FF′o, montre que le rapport $\frac{of}{of'}$ est constant, et

par suite que o est un point fixe. Cette remarque permet de construire très-simplement la tangente de l'ovale ab. Car si l'on conçoit que les points a, F, F′ se déplaçant sur leurs courbes respectives, viennent occuper les positions a_1, F_1, F'_1, on verra que les triangles aFF′, $a_1F_1F'_1$ sont tellement situés, que leurs côtés de mêmes noms concourent en trois points f, f', o situés en ligne droite. Donc, d'après un théorème connu, les droites joignant les sommets de mêmes noms des deux triangles concourent en un même point. Il en résulte enfin, en supposant que les points a_1, F, F'_1 se rapprochent indéfiniment des points a, F, F′, que les tangentes en a, F, F′ à l'ovale et aux deux circonférences, concourent en un même point. (On peut consulter sur ces courbes la *Géométrie de Descartes;* Paris, 1705, page 86; les *Opuscules de Newton,* tome II, page 172, et enfin l'*Aperçu historique de M. Chasles,* note 21 (*), d'où nous avons extrait la plupart des détails précédents.)

5. *Expression du rayon de courbure d'une roulette.*

Considérons la roulette engendrée par le point M, invariablement lié à la ligne A_0Aa qui roule sur la ligne fixe A_0AA'.

Le point de contact actuel des deux lignes étant A, la droite AM est normale à la roulette au point M. Dans l'instant suivant, l'arc très-petit Aa de la ligne mobile s'enroulera sur l'arc égal AA′ de la ligne fixe; le point M, décrivant l'arc MM′, viendra en M′, et la droite M′A′ sera normale à la courbe en M′. Les deux normales infiniment voisines, MA, M′A′ se coupant en un point C, la limite du point C, quand la seconde normale se rapproche indéfiniment de la première, coïncide avec le point qu'on appelle le *centre de courbure* de la roulette au point M, et la droite MC est le *rayon de courbure* de la roulette en ce point, dont nous nous proposons de calculer l'expression.



Notation. — Nous appellerons R, R′ les rayons de courbure en A de la ligne fixe et de la ligne mobile; ds, $d\sigma$, les différentielles des arcs corres-

(*) Au lieu de renvoyer à la note 21, il serait sans doute préférable d'indiquer le numéro de la page correspondante; malheureusement cela m'est impossible, et en voici la raison. L'ouvrage dont il s'agit, qui a paru en 1837, n'a été tiré qu'à un très-petit nombre d'exemplaires. Il est devenu depuis excessivement cher et beaucoup plus rare encore; et l'on peut dire que l'un des plus beaux monuments scientifiques qui aient été élevés à la gloire du passé, sert bien moins aujourd'hui à l'instruction des savants qu'aux spéculations des commissionnaires en librairie. Il résulte de là cette conséquence étrange, j'allais dire absurde, que celui qui veut lire l'*Aperçu historique*, ouvrage écrit en français et publié il y a moins de vingt ans, doit préalablement apprendre l'allemand et se procurer ensuite la traduction, en cette langue, de M. le professeur Sohncke (Halle, 1839; librairie de Gebauer). C'est ce que j'ai fait personnellement, et cela explique qu'ayant sous les yeux ce dernier ouvrage, j'éprouve cependant quelque difficulté à deviner la pagination du premier.

pondants (tels que AA′ et MM′) de la ligne fixe et de la roulette; r, la distance MA du point décrivant M au point de contact actuel de la ligne mobile sur la ligne fixe, *et nous regarderons r comme essentiellement positif;* i, l'angle que fait la direction AM avec la portion de la normale en A à la ligne fixe qui est dirigée dans la concavité de celle-ci, de sorte que $\cos i$ *sera positif ou négatif suivant que le point décrivant* M *sera, par rapport à la tangente en* A, *du même côté que la ligne fixe, ou du côté opposé.* Enfin, nous désignerons par ρ le rayon de courbure MC de la roulette, *et nous regarderons* ρ *comme positif ou négatif, suivant que* MC *sera dirigée de* M *vers* A, *ou dans le sens opposé.*

Cela posé, pour déterminer la position du point-limite C sur la droite AM, conformément au second cas de la méthode générale indiquée à la page 76, nous regarderons le mouvement de la droite AM comme défini par les mouvements simultanés des points A et M; et les deux triangles CAA′, CMM′ nous donneront

$$\sin C = \frac{AA'}{CA} \sin CA'A = \frac{MM'}{CM} \sin CM'M;$$

d'où

$$(a) \qquad \frac{CM}{CA} = \frac{\sin CM'M}{\sin CA'A} \cdot \frac{MM'}{AA'}.$$

Si l'on passe à la limite, et si l'on observe qu'à cet instant les angles CM′M et CA′A ont pour valeurs 1^{dr} et $1^{dr} - i$; que d'ailleurs

$$\lim. \frac{MM'}{AA'} = \frac{d\sigma}{ds} = r\left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right) \quad \text{(page 56)},$$

il viendra

$$(A) \qquad \lim. \frac{CM}{CA} = r \frac{1}{\cos i} \cdot \left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right).$$

Toutefois, comme, d'après les conventions déjà faites, $\cos i$ peut être négatif; qu'il en est de même du facteur $\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}$ dans le cas où la ligne mobile roule sur la concavité de la ligne fixe, il faudra, dans les applications de la relation (A), faire précéder du signe — les facteurs $\frac{1}{\cos i}$ et $\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}$ quand ils se trouveront négatifs.

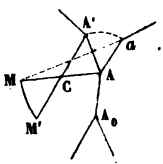
D'après cela, *et en considérant d'abord le cas des roulettes extérieures,* si l'on suppose le point décrivant M situé, par rapport à l'élément de contact A_0A, du côté opposé à la ligne fixe, et le point C situé comme dans la figure précédente, ρ sera positif, CM et CA auront pour valeurs ρ et $\rho - r$, et $\cos i$ étant négatif, on devra écrire ainsi la formule (A) :

$$\frac{\rho}{\rho - r} = r \cdot \frac{1}{-\cos i} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

ou, en changeant les signes des deux membres,

$$\text{(I)} \qquad \frac{\rho}{r-\rho} = \frac{r\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)}{\cos i}.$$

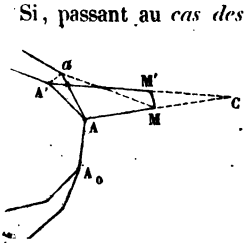
Si, au contraire, comme dans la figure à côté, on suppose le point décrivant M situé du même côté que la ligne fixe; le point C est toujours situé entre les points A et M; ρ est positif, CM et CA ont pour valeurs ρ et $r-\rho$, et $\cos i$ étant positif, on doit écrire la formule (A),



$$\frac{\rho}{r-\rho} = r \cdot \frac{1}{\cos i} \cdot \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

ce qui est encore la formule (I).

Si, passant au *cas des roulettes intérieures*, nous supposons $\frac{1}{R} > \frac{1}{R'}$ le point décrivant du côté opposé à la courbe fixe et le point C situé comme dans la figure à côté; ρ sera négatif, CM et CA auront pour valeurs $-\rho$ et $r-\rho$, et $\cos i$ étant négatif, on devra écrire

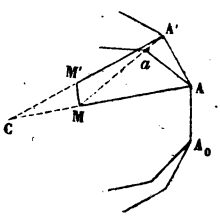


$$\frac{-\rho}{r-\rho} = r \cdot \frac{1}{-\cos i} \cdot \left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right),$$

ou, en changeant les signes des deux membres,

$$\text{(I')} \qquad \frac{\rho}{r-\rho} = \frac{r\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)}{\cos i}.$$

Si, au contraire, le point décrivant étant du même côté que la ligne fixe, on suppose le point C situé comme dans la figure et $\frac{1}{R} < \frac{1}{R'}$; ρ est négatif, CM et CA ont pour valeurs $-\rho$ et $r-\rho$; et $\cos i$ étant positif, $\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}$ négatif, on doit écrire ainsi la formule (A):



$$\frac{-\rho}{r-\rho} = -\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right) \cdot r \cdot \frac{1}{\cos i},$$

et, en changeant les signes des deux membres, on retrouve encore la formule (I').

Les autres cas que l'on pourrait encore examiner conduiraient aux mêmes formules (I) ou (I'); et comme cette dernière ne diffère de la première que par le changement du signe de R', on voit que :

La formule (I) *convient à tous les cas, pourvu qu'aux conventions initiales, sur les signes de* ρ *et de* $\cos i$, *on ajoute celle-ci : que le rayon de courbure* R' *de la ligne mobile sera regardé comme positif ou négatif, suivant que cette ligne roulera sur la convexité ou sur la concavité de la ligne fixe.*

Enfin la formule (I) étant générale, la suivante,

$$\text{(II)} \qquad \rho = r\frac{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}}{\frac{\cos i}{r}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}},$$

que l'on obtient en résolvant la première par rapport à ρ, est également générale.

Scolie. — La formule (I) s'applique encore au problème qui a pour objet de *déterminer le rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe donnée, invariablement liée à la ligne mobile et participant à son mouvement.*

Concevons, en effet, que du point de contact actuel A on mène une normale AMm à la courbe donnée, dont la position correspondante est connue : soit m le pied de cette normale et M le centre de courbure pour le point m. On sait, d'après le théorème de la page 70, que la droite mMA est une première normale de la courbe-enveloppe. Dans l'instant suivant, l'arc Aa de la ligne mobile s'enroulant sur l'arc égal AA' de la ligne fixe, le point M vient en M' en décrivant le petit arc MM' d'une roulette particulière; et l'on voit facilement que la droite A'M' peut être considérée comme normale à la courbe mobile dans sa nouvelle position; cette droite A'M' représente donc une seconde normale de la courbe-enveloppe. Il résulte de là que *le centre de courbure de l'enveloppe, en un point m de cette ligne, coïncide avec le centre de courbure en* M *de la roulette qui serait engendrée par le point* M, *centre de courbure en m de la courbe dont on considère l'enveloppe.*

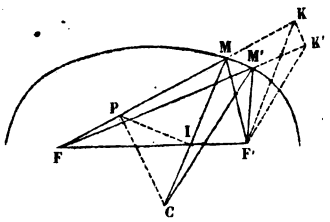
Observation. — On trouve des formules équivalentes à celles qui précèdent dans l'*Analyse des infiniment petits* (section 9, prop. 4). On peut aussi consulter sur le même sujet des articles de MM. Abel Transon et Chasles (*Journal de Mathématiques*, tome X, p. 148 et 204).

6. *Construire par points la développée de l'ellipse plane, en prenant la propriété principale des foyers pour définition de la courbe.*

De l'un des foyers F, comme centre, et avec un rayon égal à l'axe focal, décrivons une circonférence sur laquelle nous prendrons deux points très-voisins K et K' que nous joindrons par des droites au foyer F et au foyer F'. Les droites FK et FK' rencontrant l'ellipse en M, M', si nous menons par ces points des parallèles MC, M'C aux droites F'K, F'K', ces parallèles seront normales à la courbe en M, M', et la limite de leur point d'intersection C sera le point de la développée que nous nous proposons de construire.

A cet effet nous remarquerons que la formule (I) du n° 40, appliquée

au triangle CMM', donne l'expression de $\rho = \lim. \mathrm{MC}$, par le rapport du mouvement linéaire du point M au mouvement angulaire de la droite MC. Or la formule (II) du même numéro, appliquée aux deux triangles FMM', FKK', fournit le rapport du mouvement linéaire du point M à celui du point K; tandis que la formule (I), appliquée au triangle F'KK', donne le rapport du mouvement angulaire de la droite F'K et, par suite, de sa parallèle MC, au mouvement linéaire du point K. Il ne reste plus dès lors qu'à composer ces rapports pour obtenir la formule suivante :



$$\rho = \lim. \mathrm{MC} = \mathrm{F'K} . \frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{FK}} \cdot \frac{1}{\cos^2 i} = \frac{2rr'}{(r+r')\cos i},$$

dans laquelle i désigne l'angle de la normale au point M avec l'un ou l'autre des deux rayons vecteurs dont r, r' désignent les longueurs. Enfin la normale au point M coupant l'axe focal en I, on trouve, sur la figure,

$$\mathrm{MI} = \mathrm{F'K} \cdot \frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{FK}}.$$

En substituant cette valeur dans la formule précédente, il vient

$$\rho = \frac{\mathrm{MI}}{\cos^2 i};$$

et cette formule conduit à la construction suivante :

Par le point I, *où la normale* MC *coupe l'axe focal, mener, parallèlement à la tangente en* M, *une droite* IP *terminée au rayon vecteur* FM; *par le point* P *mener au rayon vecteur* FM *la perpendiculaire* PC. *Cette droite va rencontrer la normale* MC *en un point qui appartient à la développée.*

Observation. — Nous sommes entré dans quelques détails sur la manière de parvenir à cette construction, afin d'éclairer la route que nous suivrons dans la solution du problème suivant, qui présente plus de difficulté et qui nous conduira à une analogie nouvelle et remarquable entre les ellipses plane et sphérique.

7. *Construire par points la développée de l'ellipse sphérique.*

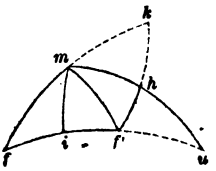
Nous entendons par là que par chaque point de l'ellipse sphérique on mène un arc de grand cercle normal à la courbe, et que l'on propose de construire le point où cet arc de grand cercle touche son enveloppe, celle-ci pouvant être appelée la *développée sphérique* de l'ellipse.

Lemme I. — Soient, dans un triangle sphérique fmf', mi et mu les arcs de grand cercle bissecteurs des angles intérieur et extérieur en m, et soit abaissé l'arc de grand cercle $f'h$ perpendiculaire sur l'arc bissecteur mu:

on aura la relation

$$(1) \qquad \operatorname{tang} mi = 2 \sin f'h \cdot \frac{\sin fm}{\sin(fm + f'm)}.$$

Démonstration. — Soit, en effet, k le point d'intersection des arcs fm et $f'h$ prolongés; on aura, à cause de l'égalité des angles en m,



$$mk = mf',$$

et, par suite,

$$fk = fm + f'm.$$

D'ailleurs l'égalité $f'k = 2f'h$, la considération du triangle kmh coupé par le grand cercle $ff'u$, et les deux triangles rectangles $uf'h$, uim fournissent ces relations :

$$\sin f'k = 2 \sin f'h . \cos f'h,$$

$$\sin mu . \sin f'h . \sin fk = \sin hu . \sin f'k . \sin fm,$$

$$\sin hu . \operatorname{tang} \widehat{u} = \operatorname{tang} f'h = \frac{\sin f'h}{\cos f'h},$$

$$\operatorname{tang} mi = \sin mu . \operatorname{tang} \widehat{u}.$$

Or, si l'on multiplie ces égalités membre à membre et que l'on simplifie, on obtient précisément la relation énoncée.

Lemme II. — *Dans l'ellipse sphérique, l'arc de grand cercle normal à la courbe en l'un de ses points, divise en deux parties égales l'angle des arcs de grand cercle qui joignent ce point aux deux foyers.*

Omettant la démonstration de ce lemme qui n'offre aucune difficulté, occupons-nous, *en premier lieu*, de construire deux arcs de grand cercle normaux à la courbe. Nous devrons, à cet effet, substituer à la propriété de l'arc normal que l'on vient de rappeler une construction géométrique équivalente; or, on aperçoit aisément que la suivante satisfait à cette condition : du point f comme pôle, avec un rayon sphérique égal à $fm + f'm$, décrire un arc de petit cercle, sur lequel on prend deux points voisins k, k'; joindre (par des arcs de grand cercle) fk, fk' qui coupent l'ellipse en m, m'; joindre de même kf', $k'f'$ et prendre sur leurs prolongements les arcs $f'n$, $f'n'$ complémentaires des moitiés des arcs $f'k$, $f'k'$; et mener enfin les arcs de grand cercle mn, $m'n'$ qui seront normaux à la courbe en m, m'.

Les arcs normaux mn, $m'n'$ se coupent en un point c, dont nous avons, *en second lieu*, à déterminer la position limite.

Nous mènerons, à cet effet, les arcs de grand cercle nn', kk', mm', et l'arc tangent mh qui est perpendiculaire à l'arc $f'k$ en son milieu h. Si nous supposons établi (ce que nous démontrerons rigoureusement à la fin), que *l'arc nn' est, à la limite, perpendiculaire à l'arc mn*, nous en déduirons (le point n étant le pôle de l'arc mh), que la limite de l'angle $f'nn'$ est

mesuré par un quadrant augmenté de l'arc mn. On a donc, en supprimant le mot *limite*, pour abréger,

$$(\alpha) \qquad \sin f'nn' = \cos mh.$$

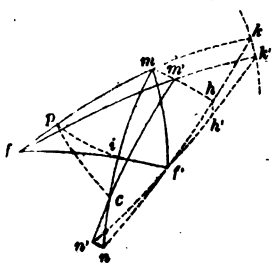
D'ailleurs, en désignant par i l'angle $fmi = f'mi$, on a

$$(\beta) \qquad \sin f'kk' = \cos mf'h,$$

$$(\gamma) \qquad \sin fmm' = \cos i,$$

$$(\delta) \qquad \sin fkk' = \sin cnn' = \sin cmm' = 1.$$

Tout cela posé, si l'on désigne par ρ, r, r' les arcs mc, mf, mf', la comparaison des deux triangles cmm', cnn' donne *d'abord*, en remarquant que les arcs cm et cn sont complémentaires, et en passant à la limite,



$$\sin \widehat{c} = \frac{\sin mm'}{\sin cm} = \frac{\sin nn'}{\sin cn},$$

d'où

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \rho = \frac{\sin mm'}{\sin nn'}.$$

En second lieu, la comparaison des triangles $f'nn'$, $f'kk'$; l'égalité $f'k = 2f'h$, jointe à cette remarque que les arcs $f'h$ et $f'n$ sont complémentaires; et la considération du triangle rectangle $f'mh$, fournissent ces trois relations

$$\frac{\sin f'n}{\sin f'k} \cdot \frac{\cos mf'h}{\cos mh} = \frac{\sin nn'}{\sin kk'},$$

$$\frac{\sin f'k}{2 \sin f'h} = \sin f'n,$$

$$\cos mh \,.\, \sin f'mh \quad \text{ou} \quad \cos mh \,.\, \cos i = \cos mf'h.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, il vient, après simplification,

$$(2) \qquad \frac{\cos i}{2 \sin f'h} = \frac{\sin nn'}{\sin kk'},$$

En troisième lieu, on trouve, par la comparaison des triangles fkk', fmm',

$$\sin \widehat{f} = \frac{\sin kk'}{\sin fk} = \frac{\sin mm'}{\sin fm'} \sin fmm',$$

et de là, en passant à la limite,

$$(3) \qquad \frac{\sin fk}{\sin fm} \cdot \cos i = \frac{\sin kk'}{\sin mm'}.$$

Enfin, si l'on multiplie membre à membre les égalités (1), (2) et (3), on

trouve définitivement

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{tang}\rho.\cos^2 i = 2\sin f'h.\frac{\sin fm}{\sin fk} = \operatorname{tang} mi;$$

en ayant égard à la formule (1) du lemme I. Or cette formule conduit à cette construction : *Par le point de rencontre de l'axe focal* ff' *avec l'arc normal* mi, *mener à ce dernier un arc perpendiculaire* ip *terminé à l'arc* fm; *par le point* p, *et perpendiculairement à l'arc* fm, *mener l'arc* pc *qui ira rencontrer l'arc normal* mi *prolongé au point* c *suivant lequel cet arc touche la développée sphérique de l'ellipse.*

Remarque. — La construction que nous venons de démontrer, comparée à celle de l'exemple précédent, établit une nouvelle et intime analogie entre les deux ellipses plane et sphérique. Il serait intéressant de rechercher si la même construction s'appliquerait aussi, dans l'*ellipse géodésique* tracée sur une surface quelconque, à la détermination du point où chaque normale géodésique touche son enveloppe.

Observation. — Il reste à établir que l'arc de grand cercle nn' est, à la limite, perpendiculaire sur l'arc mn. Nous remarquerons pour cela que les angles en m, m' du triangle cmm' étant infiniment peu différents d'un droit, la différence entre les arcs cm, cm' est un infiniment petit du second ordre : la différence entre les arcs complémentaires cn, cn' est donc du même ordre, et par suite les angles en n, n' du triangle cnn' sont infiniment peu différents l'un de l'autre, et chacun d'eux enfin diffère infiniment peu d'un angle droit.

8. *Construire par points l'enveloppe du côté libre d'un polygone de périmètre constant.*

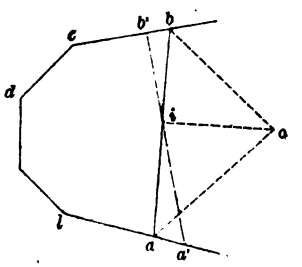
Soit i le point d'intersection de deux positions infiniment voisines ab et $a'b'$ du côté libre. Les deux polygones $abcd\ldots l$, $a'b'cd\ldots l$ étant isopérimètres, il vient, en négligeant les parties communes,

$$ia' + ib' + aa' = ia + ib + bb',$$

ou

$$\text{(1)} \qquad (ia' - ia) + aa' = (ib - ib') + bb'.$$

Supposons, comme cela arrive dans la figure, que les angles intérieurs



$\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ du polygone soient aigus. Il résulte de cette hypothèse et de la position de $a'b'$ par rapport à ab, que les différences $ia' - ia$, $ib - ib'$ sont positives; par suite, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, ces différences seront représentées, en grandeur et en signe, par $aa'.\cos a$ et par $bb.\cos b$, et la relation (1) deviendra

$$\text{(1')} \qquad aa'(1 + \cos a) = bb'(1 + \cos b).$$

D'ailleurs, la comparaison des triangles ibb', iaa' fournit cette relation :

$$(2) \qquad \frac{bb'}{ib'} \cdot \operatorname{sn} b = \frac{aa'}{ia'} \cdot \sin a.$$

Multipliant membre à membre les égalités (1'), (2) et passant à la limite, il vient

$$ia \cdot \frac{1 + \cos a}{\sin a} = ib \cdot \frac{1 + \cos b}{\sin b},$$

ou

$$(1) \qquad \frac{ia}{\operatorname{tang} \frac{a}{2}} = \frac{ib}{\operatorname{tang} \frac{b}{2}};$$

et cette formule se traduit géométriquement par cette construction : *Mener les bissectrices des angles extérieurs du polygone en a et b lesquelles se coupent au point o; et du point o abaisser une perpendiculaire sur le côté ab;* le pied de cette perpendiculaire est le point suivant lequel le côté ab touche son enveloppe. Les autres hypothèses que l'on aurait pu faire sur la nature des angles en a et b du polygone $abcd\ldots l$, conduiraient d'ailleurs à la même construction.

Remarque. — Il résulte de cette construction que le côté libre ab touche, en un même point, et son enveloppe et la circonférence exinscrite au triangle qui serait formé par le côté libre ab et par les deux côtés adjacents bc, al du polygone. On voit facilement, d'ailleurs, et par de simples considérations de géométrie élémentaire, que, le périmètre du polygone étant *donné*, la position de la circonférence est *déterminée :* cette circonférence est donc l'enveloppe même du côté libre ab.

CHAPITRE III.

Du cercle osculateur.

§ Ier.

42. Nous empruntons les principaux matériaux de ce chapitre au *Traité des Fluxions* de Maclaurin : dans ce grand ouvrage, que les immenses richesses géométriques qu'il renferme placent à côté du *Livre des Principes*, l'auteur donne sur le sujet qui va nous occuper un théorème général qu'il applique ensuite, d'une manière spéciale, à la détermination du cercle osculateur dans les sections coniques, quelles que soient d'ailleurs les données par lesquelles ces courbes se trouvent définies.

Comme résultat, il n'y avait rien à ajouter au chapitre de Maclaurin dont nous allons donner l'analyse : toutefois M. Ch. Dupin, reprenant la même question au commencement de ses *Développements de Géométrie*, l'a résolue par une méthode nouvelle et entièrement géométrique; nous reproduirons avec quelque détail l'élégante transformation qu'il a employée à cet

effet, et qui permet de passer successivement de la courbure du cercle à celle de l'ellipse en l'un de ses sommets, et de cette dernière à la courbure de l'ellipse en l'un quelconque de ses points.

Nous donnerons enfin un théorème de Mac-Cullagh sur la comparaison des cercles osculateurs de deux lignes qui, construites sur le même axe, ont leurs ordonnées dans un rapport constant; et nous terminerons par une construction géométrique fournissant, pour chaque point d'une courbe, la valeur du rapport $\frac{d\rho}{ds}$, rapport que Newton appelle *la qualité de la courbure* en ce point.

43. *Définition.* — Considérons une courbe rapportée à sa tangente en un point O, prise pour axe des x, et à une droite quelconque passant par ce point, prise pour axe des y; de sorte que pour le point de contact O l'abscisse et l'ordonnée de la courbe sont nulles simultanément.

Soient x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque M de la courbe: si x tend vers zéro, le rapport de y à x tend vers zéro, ainsi que le montre le triangle MOP (*voyez* la figure suivante), dans lequel on a

$$\frac{\text{MP}}{\text{OP}} = \frac{y}{x} = \frac{\sin \text{MOP}}{\sin \text{OMP}}.$$

Il en résulte que l'ordonnée de la courbe correspondant à une abscisse infiniment petite du premier ordre est elle-même un infiniment petit du second ordre.

Cela posé, si l'on considère un cercle de rayon quelconque, passant par le point O, ayant en ce point même tangente que la courbe proposée, et situé du même côté que cette courbe par rapport à la tangente, on verra que les ordonnées du cercle et de la courbe correspondant à une même abscisse infiniment petite seront deux infiniment petits du second ordre, dont le rapport pourra être un nombre fini quelconque; la différence de ces ordonnées sera donc dans le cas général un infiniment petit du second ordre. Toutefois, si le cercle est convenablement choisi et s'il a avec la courbe le contact le plus intime possible, la différence des ordonnées correspondantes du cercle et de la courbe sera un infiniment petit du troisième ordre, et la limite du rapport de ces ordonnées sera l'unité : le cercle défini par cette propriété est dit *osculateur* de la courbe au point considéré O.

Corollaire. — Il résulte immédiatement de cette définition et des principes relatifs à la comparaison des infiniment petits de divers ordres (*voir* le *Traité d'analyse* de M. Duhamel) que, dans la comparaison de l'ordonnée y de la courbe à un infiniment petit quelconque du deuxième ordre, à x^2 par exemple, on pourra substituer à l'ordonnée y de la courbe l'ordonnée correspondante y' du cercle osculateur; et x tendant vers zéro, les deux rapports $\frac{y}{x^2}$ et $\frac{y'}{x^2}$ tendront vers la même limite. On voit d'ailleurs que la substitution de l'ordonnée du cercle à l'ordonnée correspondante de la courbe revient à regarder le cercle osculateur d'une courbe en l'un de ses

points, comme la limite d'un cercle variable tangent en ce point à la courbe et la rencontrant en outre en un second point qui se rapproche indéfiniment du premier.

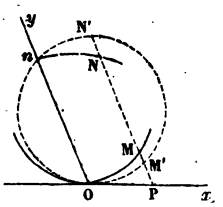
Observation. — On sait que le rayon du cercle osculateur d'une ligne en un de ses points est égal à la limite du segment intercepté sur la normale en ce point par la ligne elle-même et par la normale infiniment voisine. Il résulte de là, en général, que toutes les fois que, par la nature de la question, on saura construire immédiatement la tangente et par suite la normale à la courbe considérée, on sera en état de fixer soit par une construction, soit par une formule, la position-limite du point de rencontre de deux normales infiniment voisines, et de déterminer par conséquent le rayon du cercle osculateur. Or cette circonstance se présente, en général, dans les courbes représentées par des équations différentielles du premier ordre et dans les courbes transcendantes, dont on ramène le plus souvent les équations à cette forme : la recherche du cercle osculateur pour de pareilles courbes peut donc être considérée comme une application du problème des enveloppes, résolu dans le chapitre précédent. Pour cette raison, nous nous bornerons dans celui-ci à l'étude du cercle osculateur dans les courbes algébriques.

44. Théorème général. — *Que sur chaque ordonnée* PM *de la courbe on prenne, à partir du pied de l'ordonnée sur la tangente, une longueur* PN *telle, que le produit de* PM *par* PN *soit égal au carré de l'abscisse correspondante* OP,

$$(1) \qquad PM \,.\, PN = \overline{OP}^2 ;$$

la courbe auxiliaire, lieu géométrique des points N *ainsi obtenus, coupera l'axe* Oy *en un point appartenant au cercle osculateur de la courbe primitive au point* O.

Démonstration. — Faisons en effet, pour le cercle osculateur au point O, la même construction que pour la courbe elle-même; c'est-à-dire prenons sur chaque ordonnée PM′ du cercle une longueur PN′ telle, que l'on ait



$$(2) \qquad PM' \,.\, PN' = \overline{OP}^2 ;$$

le point N′ ainsi déterminé appartiendra évidemment au cercle osculateur, et OP tendant vers zéro, la limite de PN′ sera la corde déterminée dans ce cercle par l'axe Oy. Or les relations (1) et (2), divisées membre à membre, donnent

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{PM'}{PM},$$

et, par suite,

$$\lim.\frac{PN}{PN'} = \lim.\frac{PM'}{PM} = 1.$$

Donc

$$(3) \qquad \lim. PN = \lim. PN',$$

ce qui démontre que le point où la courbe auxiliaire, lieu des points N, rencontre l'axe Oy, est précisément l'extrémité de la corde déterminée par cet axe dans le cercle osculateur de la courbe primitive en O.

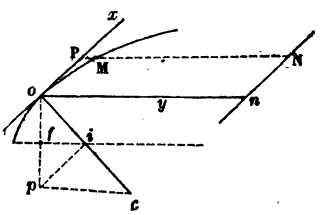
Corollaire. — Si l'axe Oy est choisi perpendiculaire à la tangente Ox, l'application du théorème précédent fournira le diamètre même du cercle osculateur.

Scolie. — On sait, d'après Newton, que, *si par un point quelconque o, pris sur le plan d'une courbe algébrique de degré n, on mène deux droites ox, oy et que l'on forme, pour chacune de ces droites, le produit des segments compris entre le point o, et chacun des n points réels ou imaginaires suivant lesquels elle rencontre la courbe; le rapport de ces produits sera indépendant de la position particulière du point o, la valeur de ce rapport dépendant uniquement des directions des droites ox, oy.*

Ce principe, combiné avec le théorème précédent, fournit l'expression géométrique de la corde du cercle osculateur d'une courbe algébrique en un point quelconque de cette courbe.

45. *Du cercle osculateur dans la parabole.*

Soient ox une tangente à la parabole, oy le diamètre passant par le point de contact et $2p'$ le paramètre correspondant. Prenons sur l'ordonnée PM le point N tel, que l'on ait



$$PM.PN = \overline{oP}^2, \quad \text{d'où} \quad PN = \frac{\overline{oP}^2}{PM}.$$

Le lieu des points N ainsi obtenus est ici une ligne droite parallèle à la tangente, car, en vertu de l'équation de la courbe,

$$\frac{\overline{oP}^2}{PM} = 2p'.$$

Il en résulte que *dans la parabole la corde du cercle osculateur, dirigée suivant le diamètre du point d'osculation, est égale au paramètre relatif à ce diamètre, et par suite au quadruple de la distance du point d'osculation au foyer; et la corde du cercle osculateur dirigée suivant le foyer a la même valeur.*

On déduit facilement de là la construction du centre du cercle osculateur, analogue à celle déjà donnée pour l'ellipse dans le chapitre précédent (page 84).

46. *Du cercle osculateur dans les coniques à centre.*

Soient ox la tangente au point o de la conique considérée, et on, on'

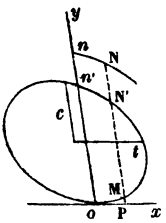
les cordes que la droite oy détermine dans le cercle osculateur en o et dans la conique elle-même, on aura

$$on = \lim. \mathrm{PN},$$

PN étant définie comme précédemment par la relation

$$(1) \qquad \mathrm{PM}.\mathrm{PN} = \overline{\mathrm{P}o}^2.$$

Or, si l'on appelle N′ le second point d'intersection de l'ordonnée PM avec la courbe, et si l'on désigne par $2t$ et $2c$ les diamètres de la courbe parallèles à la tangente ox et à l'axe oy, on aura, d'après le théorème de Newton,



$$(2) \qquad \mathrm{PM}.\mathrm{PN}' = \overline{\mathrm{P}o}^2 \cdot \frac{c^2}{t^2}.$$

Comparant (1) et (2), on trouve

$$\mathrm{PN} = \mathrm{PN}'.\frac{t^2}{c^2};$$

par suite,

$$\lim. \mathrm{PN} = \frac{t^2}{c^2} \lim. \mathrm{PN}',$$

c'est-à-dire,

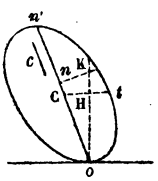
$$(\mathrm{X}) \qquad on = on'.\frac{t^2}{c^2}.$$

On a donc ce théorème général : *La corde du cercle osculateur est à la corde correspondante de la conique comme le carré du diamètre parallèle à la tangente au point d'osculation est au carré du diamètre parallèle à la direction commune des deux cordes.*

Corollaire I. — Que la ligne oy, au lieu d'être quelconque, coïncide avec le diamètre oc du point de contact; la corde on' de la conique sera égale à $2c$, et la formule précédente deviendra

$$(\mathrm{I}) \qquad on = \frac{2t^2}{c}.$$

D'ailleurs, si l'on mène la normale indéfinie oHK, coupant en H le diamètre $2t$ parallèle à la tangente et rencontrée en K par la perpendiculaire à la corde on menée par l'extrémité de cette corde, la similitude des triangles oHC, onK, dans l'un desquels oK est évidemment le diamètre 2ρ du cercle osculateur, donne la relation



$$2\rho = o\mathrm{K} = on.\frac{o\mathrm{C}}{o\mathrm{H}} = \frac{2t^2}{c}.\frac{c}{o\mathrm{H}} = \frac{2t^2}{o\mathrm{H}},$$

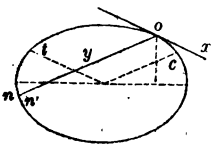
d'où

$$(\mathrm{II}) \qquad \rho = \frac{t^2}{o\mathrm{H}}.$$

Donc, *le cercle osculateur en un point d'une conique détermine sur le diamètre qui passe par le point de contact, une corde égale au paramètre relatif à ce diamètre* (I); *et le rayon du cercle osculateur est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente au point d'osculation, divisé par la distance du centre à la tangente* (II).

C'est l'expression du rayon de courbure généralement attribuée à M. Ch. Dupin.

Corollaire II. — Si la direction de oy est tellement choisie, que les diamètres $2c$ et $2t$, parallèles à oy et à la tangente, soient égaux, la formule générale deviendra



$$\text{(III)} \qquad on = on'.$$

Donc *si par un point d'une conique on mène une corde symétrique de la tangente par rapport à une parallèle à l'un des axes de la courbe, cette corde appartiendra en même temps à la conique et au cercle osculateur au point considéré.*

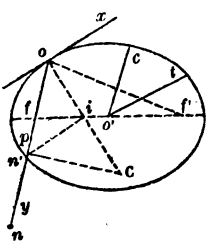
Corollaire III. — Que la droite oy soit dirigée suivant l'un des foyers f de la courbe; nous aurons toujours

$$(1) \qquad on = on'.\frac{t^2}{c^2}.$$

Or on sait : 1°. Que le carré d'un diamètre est équivalent au produit par le grand axe de la corde menée par l'un des foyers parallèlement au diamètre;

2°. Que le carré d'un diamètre est égal à quatre fois le rectangle des rayons vecteurs qui joignent les deux foyers à l'une des extrémités du diamètre conjugué au premier.

On aura donc



$$\overline{4c}^2 = on'.2A,$$

$$(2) \qquad \frac{on'}{c^2} = \frac{2}{A};$$

$$4t^2 = 4rr',$$

$$(3) \qquad t^2 = rr',$$

r, r' désignant les rayons vecteurs joignant les deux foyers au point d'osculation o. Par suite, en substituant dans (1), on aura *pour la corde du cercle osculateur dirigée suivant l'un des foyers,*

$$\text{(IV)} \qquad on = \frac{2rr'}{A} = \frac{4rr'}{r+r'},$$

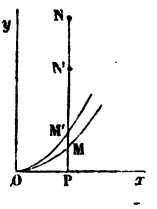
et l'on parviendrait facilement, au moyen de cette formule, à la construction du centre du cercle osculateur, telle qu'elle a été donnée dans le chapitre précédent (page 84).

Observation. — Nous ne suivrons pas Maclaurin dans les nombreuses applications qu'il ajoute à celles que nous venons de rapporter et dont l'utilité ne saurait être qu'accidentelle : dans chaque cas particulier, le théorème de Newton et le principe général qui précède permettent, en se servant convenablement des données qui définissent la conique considérée, d'arriver à la détermination du cercle osculateur la plus conforme au but que l'on peut avoir en vue.

§ II.

47. La méthode de transformation de M. Dupin, dont nous avons parlé au commencement de ce chapitre, est fondée sur deux lemmes que nous allons d'abord établir : dans la démonstration du premier, nous nous appuierons, pour éviter des redites, sur le théorème général du § précédent.

LEMME I. — *Soit une courbe* (c) *rapportée à l'une de ses tangentes* Ox *et à la normale correspondante* Oy *prises pour axes des* x *et des* y *; que sur chaque ordonnée* PM *de la courbe on prenne une nouvelle ordonnée* PM′, *qui soit à la première dans le rapport constant de* b *à* a, *et soit* (c') *la nouvelle courbe qui résulte de cette construction ; le rapport des rayons des cercles osculateurs des deux courbes au point* O, *sera égal à l'inverse du rapport constant de leurs ordonnées.*



Démonstration. — Désignons par 2ρ et $2\rho'$ les diamètres des cercles osculateurs des deux courbes en O ; et sur l'ordonnée commune PMM′, prenons les points N et N′ tels, que l'on ait

$$(a) \qquad PM.PN = \overline{PO}^2,$$

$$(a') \qquad PM'.PN' = \overline{PO}^2.$$

L'abscisse commune OP tendant vers zéro, on a

$$2\rho = \lim. PN \quad \text{et} \quad 2\rho' = \lim. PN';$$

d'où

$$\frac{\rho}{\rho'} = \lim. \frac{PN}{PN'}.$$

D'ailleurs les relations (a) et (a'), divisées membre à membre, donnent

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{PM'}{PM} = \frac{b}{a}.$$

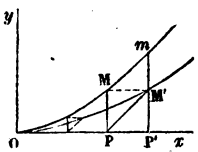
On a donc

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{PM'}{PM} = \frac{b}{a}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME II. — *Soit une courbe* (c) *rapportée à deux axes* Ox *et* Oy *dont le premier est tangent à la courbe au point* O. *Par le pied* P *de chaque ordonnée* MP *de la courbe, et sous une direction donnée, menons une*

droite PM′ *sur laquelle nous prendrons un point* M′ *situé à la même distance de la tangente* Ox *que le point* M, *et soit* (c') *la courbe, lieu géométrique des points* M′ *ainsi obtenus : les deux courbes* (c) *et* (c') *auront même cercle osculateur au point* O.

Démonstration. — Il résulte immédiatement de la définition du cercle osculateur qu'il suffira, pour la démonstration du théorème actuel, d'établir que la différence entre les ordonnées des deux courbes (c) et (c') est un infiniment petit du troisième ordre, quand l'abscisse commune est du premier.



Or, soient M, M′ deux points *correspondants* des deux courbes ; joignons MM′ qui est parallèle à Ox d'après la construction ; menons parallèlement à MP ou à Oy l'ordonnée M′P′ de la courbe (c'), qui rencontre en m la courbe (c), et joignons Mm. Si l'on désigne par α et α' les angles constants et finis que MP et M′P forment avec Px, le triangle MPM′ donne d'abord

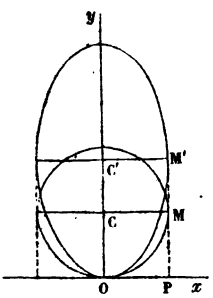
$$\frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{MP}} = \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin \alpha'};$$

il en résulte que MM′ est, comme MP, un infiniment petit du second ordre. Le triangle MmM′ donne ensuite

$$\frac{m\mathrm{M'}}{\mathrm{MM'}} = \frac{\sin m\mathrm{MM'}}{\sin \mathrm{M}m\mathrm{M'}}.$$

Mais le rapport des sinus, qui forme le second membre, tend vers zéro quand P tend vers le point O : le rapport de mM′ à MM′ est donc un infiniment petit ; et MM′ étant lui-même du deuxième ordre, il en résulte que mM′, c'est-à-dire la différence des ordonnées correspondantes des deux courbes (c) et (c'), est un infiniment petit du troisième ordre. C. Q. F. D.

48. Appliquons le mode de transformation auquel se rapporte le lemme I à un cercle (C) de rayon a, en employant des ordonnées perpendiculaires à la tangente Ox ; et soit $\frac{b}{a}$ le rapport constant des ordonnées correspondantes de la courbe dérivée (C′) et du cercle (C). Le rapport $\frac{\rho}{\rho'}$ des rayons des cercles osculateurs en O du cercle et de la courbe (C′) sera égal à $\frac{b}{a}$; d'ailleurs $\rho = a$; on aura donc



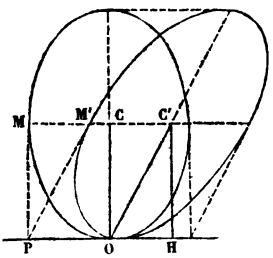
$$\rho' = \frac{a^2}{b}$$

pour le rayon du cercle osculateur en O de la courbe (C′). D'ailleurs la courbe dérivée (C′) est évidemment une ellipse dont le point O est l'un des

sommets, le demi-axe aboutissant en O étant égal à b, et le demi-axe parallèle à la tangente en O étant égal à a.

Donc *le rayon du cercle osculateur d'une ellipse en l'un de ses sommets est égal au carré du demi-axe étranger au sommet, divisé par le demi-axe qui aboutit à ce sommet.*

49. Appliquons maintenant le mode de transformation auquel se rapporte le lemme II à l'ellipse (C), ayant pour demi-axes $CM = a$, $CO = b$; les ordonnées MP de l'ellipse étant perpendiculaires à la tangente Ox en l'un de ses sommets, et les ordonnées PM' de la courbe dérivée (C'), ayant une direction quelconque. Les deux courbes ayant même cercle osculateur au point O, on aura



$$\rho' = \frac{a^2}{b}$$

pour le rayon du cercle osculateur en O de la courbe (C'). Or cette courbe est une ellipse dont le point O est l'extrémité d'un diamètre quelconque; $a = CM = C'M'$ est le demi-diamètre de cette ellipse parallèle à la tangente en O, et $b = OC = C'H$ est la distance du centre C' de cette ellipse à la tangente en O.

Donc *le rayon du cercle osculateur d'une ellipse en l'un quelconque de ses points est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente en ce point, divisé par la distance du centre à la tangente.*

§ III.

50. *Comparaison des rayons des cercles osculateurs de deux lignes construites sur le même axe et dont les ordonnées correspondantes sont dans un rapport constant. Théorème de Mac-Cullagh.*

Il résulte de la remarque faite au § I, n° 43, page 89, que l'on peut regarder le cercle osculateur en un point d'une courbe comme la limite des cercles passant par ce point et par deux autres points de la courbe infiniment voisins du premier.

Nous plaçant à ce point de vue, considérons deux courbes (c) et (c') qui, construites sur le même axe ox, ont leurs ordonnées correspondantes dans un rapport constant : soient A, B, C trois points de la première et A', B', C' les points correspondants de la seconde, et désignons par a, b, c, a', b', c' les côtés des triangles ABC, A'B'C', et par r, r' les rayons des cercles circonscrits à ces triangles. Si, recourant à la méthode par les aires auxiliaires (Ire Partie, page 14), nous désignons par S, S' les surfaces des triangles ABC, A'B'C', nous aurons

$$r = \frac{a.b.c}{4S}, \qquad r' = \frac{a'.b'.c'}{4S'};$$

d'ou

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} \cdot \frac{S'}{S}.$$

Mais le rapport des aires S' et S est égal au rapport des ordonnées correspondantes des deux courbes y' et y; on peut donc écrire

$$(1) \qquad \frac{r}{r'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} \cdot \frac{y'}{y}.$$

D'ailleurs les côtés a et a' ayant même projection sur l'axe commun des deux courbes, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{\cos(a', ox)}{\cos(a, ox)},$$

et l'on a des expressions analogues pour $\frac{b}{b'}$ et $\frac{c}{c'}$. Il en résulte que, si les points B, C et B', C' tendent à se confondre respectivement avec A et A', en même temps que r et r' tendent vers leurs limites respectives ρ et ρ', rayons des cercles osculateurs des deux courbes en A et A', les trois rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$ tendent vers une limite commune qui est égale au rapport inverse des cosinus des angles que font, avec l'axe commun ox, les tangentes aux deux courbes en A et en A'. On a donc, en passant à la limite et désignant ces angles par α et α',

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\cos^3 \alpha'}{\cos^3 \alpha} \cdot \frac{y'}{y},$$

ou

$$(x) \qquad \rho . y . \cos^3 \alpha = \rho' . y' . \cos^3 \alpha'.$$

Enfin, si l'on désigne par t et t' les portions des tangentes aux deux courbes comprises entre les points de contact A, A' et l'axe commun ox, on aura

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{t'}{t},$$

et la formule précédente pourra être remplacée par celle-ci :

$$(x') \qquad \frac{\rho . y}{t^3} = \frac{\rho' . y'}{t'^3}.$$

51. Si l'on applique la formule précédente à l'ellipse et au cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, on trouvera que *le rayon du cercle osculateur, en un point quelconque de l'ellipse, est égal au cube du demi-diamètre parallèle à la tangente en ce point, divisé par le rectangle des demi-axes;* et cette expression, qui équivaut à l'une de celles déjà données, aura été obtenue en suivant une voie entièrement élémentaire. De plus, dans le cas spécial où nous nous plaçons, la relation (1) d'où les formules (x) et (x') ont été déduites, donne le théorème suivant, dû à Mac-Cullagh

(*voir* les *Nouvelles Annales*, 1850, page 296) : *Un triangle étant inscrit dans une ellipse, le rayon du cercle circonscrit au triangle est égal au produit des demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle, divisé par le produit des demi-axes.*

§ IV.

52. Newton a donné le nom de *qualité de la courbure* d'une ligne en l'un de ses points au rapport $\frac{d\rho}{ds}$, c'est-à-dire à la limite du rapport de l'accroissement du rayon du cercle osculateur à l'accroissement de l'arc, quand on passe du point considéré sur la ligne à un point infiniment voisin.

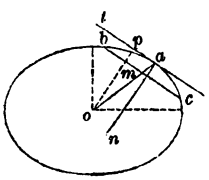
Maclaurin, dans son Traité sur les *Propriétés générales des courbes algébriques* (théorème III) et dans son *Traité des Fluxions*, trouva l'expression et la construction géométrique de ce rapport; mais cette construction présente l'inconvénient de nécessiter l'emploi d'une courbe auxiliaire. Or le théorème suivant nous fournira, en même temps que la solution d'un problème proposé par Carnot (*Géométrie de position*, problème 75, page 477), une construction géométrique très-simple du rapport $\frac{d\rho}{ds}$.

53. **Théorème.** — *Que l'on désigne par* $\frac{d\rho}{ds}$ *la qualité de la courbure d'une ligne en l'un de ses points, et que l'on appelle* α *l'angle formé par la normale en ce point avec la droite qui passe par le milieu de la corde parallèle à la tangente en ce point et infiniment voisine de celle-ci, on aura*

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}.$$

Démonstration. — La nature de la question conduit à remplacer la ligne donnée, qui est quelconque, par une ellipse ayant avec la proposée un contact du troisième ordre; il suffira donc d'établir la formule (1) pour l'ellipse osculatrice.

Pour y parvenir par la voie la plus rapide, regardons cette courbe comme la trajectoire d'un mobile soumis à l'action d'une force émanant du centre de la courbe, et observons que la droite qui fait, avec la normale en a, l'angle α est précisément le diamètre de l'ellipse qui aboutit en ce point. Cette droite est donc dirigée suivant le centre attirant, et l'on a, par conséquent,



$$(a) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{T}{N} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{v^2}{\rho}},$$

T, N désignant les composantes tangentielle et normale de la force accé-

lératrice, v désignant la vitesse du mobile en a, et ρ le rayon du cercle osculateur de l'ellipse au même point.

Si l'on observe que $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{vdv}{ds}$, la formule (a) pourra s'écrire

$$(a') \qquad \tang \alpha = \frac{\rho . dv}{v . ds}.$$

Cela posé, si l'on désigne par a et b les demi-axes de l'ellipse, par λ un paramètre constant et par p la distance du centre à la tangente en a, on sait que l'on a

$$\rho = \frac{p^3}{ab}, \quad dv = \frac{\lambda dp}{p^2}, \quad v = \frac{\lambda}{p};$$

d'où

$$(b) \qquad \frac{\rho dv}{v} = \frac{p^2 dp}{ab} = \frac{1}{3} d\rho.$$

Et de là, en substituant dans (a'), il vient la formule cherchée

$$(\mathrm{I}) \qquad \tang \alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{d\rho}{ds}.$$

Corollaire. — On déduit facilement de cette formule la construction du cercle osculateur de la développée de l'ellipse en l'un quelconque de ses points.

54. Problème. — *Que l'on mène parallèlement à la tangente en un point* B *d'une courbe une corde* AC, *dont la distance à la tangente soit un infiniment petit du second ordre, et que l'on joigne le milieu* μ *de cette corde au point de contact par la droite* Bμ. *On propose de déterminer la direction-limite de la droite* Bμ, *ou la limite de l'angle* α *qu'elle forme avec la normale en* B. (*Géométrie de position*, probl. 76, page 477.)

Solution. — Ce problème se trouve implicitement résolu par la démonstration du théorème précédent; mais ce n'est là qu'une solution détournée et reposant d'ailleurs sur un nombre considérable de propositions antérieures. On pourrait, à la vérité, modifier la démonstration de manière à se servir seulement de l'expression du rayon de courbure de l'ellipse osculatrice, ainsi que l'a fait M. Abel Transon (*Journal de Mathématiques*, 1841, p. 191); mais il y a encore dans cet emploi quelque chose d'indirect que l'on peut éviter (aux dépens de la brièveté, il est vrai) par l'emploi des considérations suivantes.

Observons d'abord que, Bh mesurant la distance de la tangente à la corde AC, dont μ est le milieu, on a

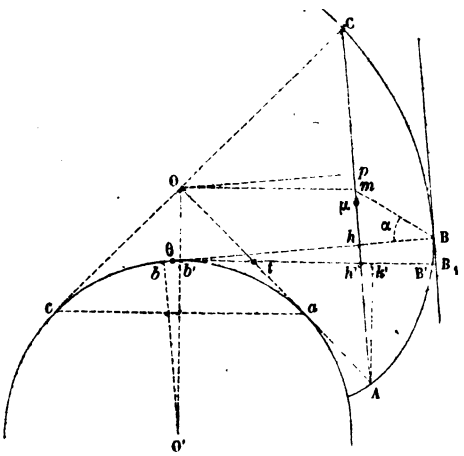
$$\tang \alpha = \frac{\mu h}{\mathrm{B}h};$$

et comme Bh est du second ordre, que tang α est, en général, un nombre

fini, on voit que μh est du même ordre, et que, par suite, on doit fixer la position approchée m du milieu μ de la corde AC, de manière à ne commettre qu'une erreur du troisième ordre, ce qui exige que l'on évalue la corde AC avec la même approximation. Or, si deux courbes ont un contact de l'ordre n, la différence des ordonnées, comptées à partir de la tangente commune, étant, par définition, un infiniment petit de l'ordre $n+1$, on en déduit aisément que la différence des cordes telles que AC, A'C' de ces courbes est seulement de l'ordre n.

Nous pourrons donc, pour l'objet actuel, remplacer la ligne donnée par une autre ABC, ayant avec elle un contact du troisième ordre en B; et si nous prenons pour cette ligne ABC une *développante de cercle*, le rayon $O'b = \rho'$ de ce cercle sera précisément le rayon de courbure de la développée de la courbe primitive, au point b où cette développée est touchée par la normale en B.

Cela posé, soient a, b, c les points de contact sur le cercle O' des normales en A, B, C; O l'intersection de Aa prolongée avec Cc. Soient menées la droite O'O coupant le cercle en b'; et la normale b'B' coupant en t et h', les droites AaO et AC. Menons enfin la bissectrice Om de l'angle COA et la perpendiculaire Op à CA; posons $O'b = O'b' = \rho' = 1$, $Aa = \rho$, arc $ab' =$ arc $cb' = \varphi$, et désignons en général par ε^n un infiniment petit de l'ordre n.



1. Je dis d'abord que le *point m*, extrémité de la bissectrice de l'angle AOC, *peut être pris pour le milieu* μ *de la corde* AC. On a, en effet,

$$Am - Cm = (Am + Cm)\frac{(AO - CO)}{AO + CO} = AC.\frac{AO - CO}{AO + CO}.$$

Or, AO + CO est une grandeur finie, AC est du premier ordre et AO — CO est du troisième ordre. Car

$$AO - CO = (Aa + aO) - (Cc - Oc) = 2(\tang\varphi - \varphi) = \frac{\varphi^3 - \frac{\varphi^3}{3} + \varepsilon^5}{\cos\varphi};$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au troisième,

$$(1) \qquad AO - CO = \frac{2}{3}\varphi^3.$$

Donc $Am - Cm = 2m\mu$ est du quatrième ordre, et l'on peut substituer le point m au point μ.

2. Op étant perpendiculaire sur AC, évaluons pm ou $p\mu$. On trouve

$$\overline{Ap}^2 - \overline{Cp}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{CO}^2,$$

$$Ap - Cp = 2\mu p = 2mp = \frac{AO - CO}{AC}.(AO + CO).$$

Or, on a déjà trouvé $AO - CO = \frac{2}{3}\varphi^3$, et le triangle AOC donne, en négligeant ε^6,

$$AC^2 = 4\,AO.CO.\sin^2\varphi,$$

d'où

$$AC = \sin\varphi.2\sqrt{AO.CO} = \varphi.\frac{\sin\varphi}{\varphi}.2\sqrt{AO.CO}.$$

Il vient donc, en substituant ces valeurs dans l'expression de $2mp$,

$$2mp = \frac{\frac{2}{3}\varphi^3}{\varphi}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{AO + CO}{2\sqrt{AO.CO}} = \frac{2}{3}\varphi^2.\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{AO + CO}{2\sqrt{AO.CO}};$$

et, comme le premier facteur est du second ordre, on peut remplacer chacun des deux autres facteurs par sa limite qui est l'unité; il vient donc

$$(2) \qquad mp = \frac{1}{3}\varphi^2.$$

Il résulte d'ailleurs de cette expression de mp que l'angle pOm, son égal $\widehat{bO'b'}$ et l'arc bb' qui le mesure, sont des infiniment petits du second ordre; donc, en appelant θ le point d'intersection des tangentes bh, $b'h'$, on voit que les triangles $\theta hh'$, Opm sont semblables et que la différence des côtés finis de ces triangles est du second ordre; donc la différence des côtés infiniment petits $h'h$, mp est du quatrième, et l'on peut écrire

$$(2') \qquad h'h = \frac{1}{3}\varphi^2.$$

3. On déduit aisément de là l'expression de hm, qui nous sera nécessaire pour calculer tang $\alpha = \frac{hm}{Bh}$. Car $hm = h'm - hh'$; ou, à cause des parallèles, $hm = Ob' - hh'$; d'ailleurs $Ob' = \sec\varphi - 1 = \frac{\varphi^2}{2} + \varepsilon^4$ il vient donc, en substituant,

$$(1) \qquad hm = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi^2}{3}.$$

4. Pour calculer Bh, on observera *d'abord* que la différence entre Bh et $B'h'$ est du quatrième ordre. Car

1°. $\theta h' - \theta h = \theta h'(1 - \cos\theta) = \theta h' . 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \varepsilon^4$, puisque l'angle $\theta = \widehat{pOm}$ est du second ordre;

2°. $\theta B' - \theta B$ (différence positive comme la différence analogue $OA - OB$) est moindre que $\theta B_1 - \theta B$, qui est du quatrième ordre pour la même raison.

Donc la différence $B'h' - Bh$ étant du quatrième ordre, nous pourrons substituer $B'h'$ à Bh.

En second lieu, si l'on abaisse Ak' perpendiculaire sur $B'h'b'$, on verra que $h'k' = Ah' \sin h'Ak' = Ah' \sin\theta = \varepsilon^3$, et l'on pourra écrire, par conséquent,

$$(3) \qquad Bh = B'h' = B'k'.$$

Enfin, on trouve successivement sur la figure

$$k'B' = b'B' - b't - tk' = (\rho + \varphi) - \tang\frac{\varphi}{2} - \left(\rho + \tang\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi,$$

et l'on en déduit successivement

$$k'B' = \rho(1 - \cos\varphi) + \varphi - \tang\frac{\varphi}{2}(1 + \cos\varphi) = \rho.\frac{\varphi^2}{2} + \varepsilon^4 + (\varphi - \sin\varphi),$$

$$k'B' = \frac{\varphi^2}{2}.\rho + \varepsilon^3.$$

Donc enfin

$$(\mathrm{II}) \qquad Bh = \frac{1}{2}\varphi^2.\rho.$$

5. Si l'on divise membre à membre les relations (I) et (II), il vient d'abord

$$\tang\alpha = \frac{1}{3}.\frac{1}{\rho};$$

et si l'on observe que, le rayon $O'b = \rho'$ du cercle osculateur de la développée ayant été pris pour unité de longueur, cette formule équivaut, en rétablissant l'indétermination de cette unité, à celle-ci

$$\frac{\tang\alpha}{\rho'} = \frac{1}{3}.\frac{\rho'}{\rho},$$

il vient définitivement

$$(\mathrm{X}) \qquad \tang\alpha = \frac{1}{3}.\frac{\rho'}{\rho},$$

au moyen de laquelle on passe aisément à la formule (I) du numéro précédent.

Observation. — Carnot avait été conduit accidentellement à se poser le

problème que nous venons de résoudre, dans le but de parvenir à une définition générale des courbes planes, indépendante de tout système de coordonnées *arbitraires;* ces coordonnées ne devant être considérées, d'après lui, que comme des auxiliaires utiles, mais étrangers en réalité à la courbe considérée, et qu'il serait par conséquent plus élégant de supprimer. On voit que cette conception est diamétralement opposée à celle de Descartes, et autant cette dernière paraît lumineuse, autant elle est utile et féconde, à cause même de l'indétermination qu'elle comporte; autant, il faut l'avouer, la conception de Carnot paraît obscure et semble devoir demeurer stérile, précisément parce qu'elle veut atteindre l'absolu. Quoi qu'il en soit d'ailleurs de la valeur de cette conception, Carnot fait remarquer qu'une courbe plane quelconque peut être définie par la relation $f(\rho, \alpha) = 0$ qui existe entre le rayon de courbure de cette ligne, en l'un de ses points, et l'angle correspondant α, dont nous venons de déterminer la tangente, ρ et α formant évidemment un système de coordonnées *absolues* satisfaisant aux conditions qu'il s'était imposées. Or, c'était afin de pouvoir revenir de l'équation $f(\rho, \alpha) = 0$ à l'équation en coordonnées rectilignes ordinaires, qu'il s'était proposé de trouver l'expression de tang α.

CHAPITRE IV.

Des maxima et minima absolus.

§ Ier. — De la grandeur maximum ou minimum parmi des grandeurs déterminées.

55. Kepler paraît avoir observé le premier la propriété remarquable dont jouit une grandeur variable dans le voisinage de son état de maximum ou de minimum. L'un de ses ouvrages, *Nova stereometria doliorum vinariorum...*, 1615, renferme, en effet, outre les premiers germes de la géométrie infinitésimale bientôt développés par Cavalleri (*Geometria indivisibilibus...*, 1635), cette importante observation que *dans le voisinage de sa plus grande ou plus petite valeur, une grandeur ne varie que par degrés insensibles;* et l'on voit que cette observation n'est guère séparée du principe qui sert de base à la théorie analytique actuelle des maxima et minima que par l'intervalle d'une définition.

Un peu plus tard, vers 1636, Fermat, précisant ce premier aperçu, prit pour base de sa méthode des maxima et minima ce principe que, *si l'on prend une grandeur variable dans son état de maximum ou de minimum et dans un second état infiniment voisin du premier, les valeurs correspondantes de cette grandeur sont égales.*

Ce principe, dont nous modifierons un peu l'énoncé afin de demeurer exact dans la forme comme dans le fond, sert de base à la méthode géométrique des maxima et minima : méthode qui a son importance propre à côté de la théorie analytique correspondante, et qui supplée très-heureusement

à celle-ci dans un grand nombre de questions où elle paraît être en défaut.

PRINCIPE FONDAMENTAL. — *Soient a_0, a_1, deux valeurs infiniment voisines d'une grandeur variable* A, *entre lesquelles se trouve comprise la valeur maximum ou minimum a de cette grandeur. Les valeurs extrêmes a_0, a_1 peuvent être considérées comme rigoureusement égales entre elles.*

Démonstration. — Supposons, pour fixer les idées, que a soit la valeur *maximum* de A, et que a_0 soit une valeur infiniment voisine de a, inférieure à a, puisque celle-ci est maximum, et précédant a dans l'ordre de formation des valeurs successives de la grandeur A. Celle-ci, continuant à varier au delà de la valeur a, ira nécessairement en décroissant pendant un certain temps, depuis la valeur maximum a jusqu'à une valeur $a-\alpha$, α étant un nombre fini; et comme nous supposons *essentiellement* que la grandeur A varie d'une manière continue entre a et $a-\alpha$, elle passera nécessairement par une valeur a_1, précisément égale à a_0, et qui sera, comme celle-ci, infiniment voisine de la valeur maximum a.

COROLLAIRE. — La méthode à suivre dans la recherche du maximum ou minimum d'une grandeur variable, résulte immédiatement du principe précédent : *Prenant la grandeur considérée dans deux états successifs, c'est-à-dire infiniment voisins, on exprimera qu'elle a la même valeur dans ces deux états; l'égalité résultante, convenablement interprétée et prise à l'instant-limite où les deux états successifs se confondent, fournit une propriété qui caractérise la grandeur variable à l'instant où elle atteint sa valeur maximum ou minimum.*

APPLICATIONS.

56. PROBLÈME I. — *Par un point donné, mener une droite telle, que le segment déterminé sur cette droite, par les côtés d'un angle donné, soit minimum.* (*Opuscules de Newton*, tome I, page 87, questions 2 et 3.)

Solution. — Soient aib, $a'ib'$, deux droites passant par le point donné i, infiniment voisines de la droite à laquelle correspond le segment minimum, et telles, que les segments ab, $a'b'$ soient égaux. Les segments ab, $a'b'$ étant égaux, et les droites aib, $a'ib'$ étant infiniment voisines l'une de l'autre, leur point d'intersection i est infiniment voisin du point suivant lequel la droite ab toucherait son enveloppe, si elle se mouvait, sous cette condition que le segment de cette droite, intercepté dans l'angle donné, conservât une longueur constante. Donc (d'après la construction de la page 61), pour la droite aib infiniment voisine de la droite cherchée, le point donné i est infiniment voisin du pied de la perpendiculaire abaissée sur cette droite du point de concours des perpendiculaires aux côtés de l'angle donné, menées par les points a et b. On en conclut que *la droite minimum, menée par un point donné dans un angle donné, est définie par cette condition, que la perpendiculaire à cette droite menée par le point donné, et les perpendiculaires aux côtés de l'angle menées par les extrémités de la droite concourent en un même point.*

Scolie. — On arriverait à une définition toute semblable de la droite à segment minimum, en remplaçant les côtés de l'angle par deux courbes quelconques, et en substituant aux droites issues d'un point fixe du problème précédent des droites tangentes à une courbe fixe.

PROBLÈME II. — *Mener tangentiellement à une courbe donnée une droite qui intercepte dans un angle donné, circonscrit à la même courbe, un triangle de surface maximum ou minimum.*

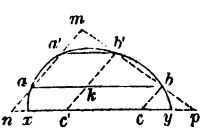
Solution. — Soit i le point d'intersection de deux tangentes infiniment voisines et interceptant dans l'angle yox des triangles aob, $a'ob'$ équivalents. Les triangles infiniment petits aia', bib' étant eux-mêmes équivalents et le point i étant infiniment voisin du point de contact t de la tangente ab, on voit que pour une tangente, ab, infiniment voisine de la tangente cherchée AB, le point de contact t est infiniment voisin du milieu du segment ab. Donc *la tangente cherchée est définie par cette condition, que son point de contact coïncide avec le milieu du segment déterminé par cette tangente dans l'angle donné.*

Remarque. — Il y a maximum ou minimum, suivant que l'on considère la portion de la courbe tournant sa convexité ou sa concavité vers le sommet de l'angle.

COROLLAIRE. — *Parmi tous les polygones d'un même nombre de côtés, circonscrits à une courbe fermée, le polygone, dont la surface est minimum, est défini par cette condition, que le point de contact de chaque côté coïncide avec le point-milieu de ce côté.*

PROBLÈME III. — *Dans un segment donné d'une courbe quelconque, inscrire un rectangle d'aire maximum.* (*Opuscules de Newton*, tome I, page 87, question 1.)

Solution. — Soient ab, $a'b'$ les côtés, parallèles à la base xy du segment, de deux rectangles infiniment voisins, comprenant entre eux le rectangle maximum et équivalents. Menons les droites indéfinies aa', bb' qui forment avec xy un triangle mnp, et substituons aux rectangles ayant pour côtés ab, $a'b'$ les parallélogrammes équivalents $abcn$, $a'b'c'n$. Soit k l'intersection de ab et de $b'c'$. La comparaison des parallélogrammes $abcn$, $a'b'c'n$, équivalents et ayant une partie commune, montre que les parallélogrammes $a'b'ka$ et $bcc'k$ sont équivalents, on a donc l'égalité



$$(1) \qquad a'b'.b'k = bk.bc, \quad \text{ou} \quad \frac{b'k}{bk} = \frac{bc}{a'b'}.$$

D'ailleurs, les triangles semblables $b'kb$, $ma'b'$ donnent cette relation

$$(2) \qquad \frac{b'k}{bk} = \frac{a'm}{a'b'},$$

et la comparaison des relations (1) et (2) donne l'égalité

$$bc = a'm,$$

ou

$$(3) \qquad an = a'm.$$

Si donc, passant à la limite, on suppose que ab et $a'b'$ se confondent avec le côté $\alpha\beta$ du rectangle maximum, on verra que *le rectangle maximum, inscrit dans un segment de courbe, est celui dont le côté est également éloigné de la base du segment et du point de concours des tangentes menées à la courbe par les extrémités de ce côté.*

Problème IV. — *Trouver, pour un lieu donné, le jour du plus petit crépuscule.*

Ce problème a eu une certaine célébrité, et par les difficultés qu'il présente et par les noms des géomètres qui s'en sont occupés : il a été résolu pour la première fois par Nonius, géomètre portugais (*De Crepusculis*, Coïmbre, 1573). Plus tard, Jean Bernoulli reprit la même question, et voici ce qu'on lit à ce sujet dans ses œuvres (*Opera omnia*, tome I, page 64) : *J'ai résolu le problème de trouver géométriquement le jour du plus petit crépuscule, ce qui a occupé mon frère, professeur de mathématiques à Bâle, et moi depuis plus de cinq ans, sans en pouvoir venir à bout. Ce problème est d'autant plus curieux que je demeure, par ma méthode de maximis et minimis (qui est pourtant une des plus courtes), dans un calcul prolixe et embarrassé, qui se laisse enfin réduire en une petite équation carrée qui se transforme en cette simple proportion géométrique*

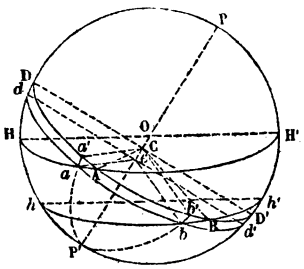
$$\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{H}{2}} = \frac{\sin\lambda}{\sin D}. \quad \text{(Janvier 1693.)}$$

Dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (tome I, page 159), Hachette ajoute aux détails précédents que Monge résolut la même question en menant un plan tangent commun à deux cônes ayant même sommet : il ne paraît pas d'ailleurs que Monge ait publié sa solution, la construction à laquelle il est parvenu ayant été seule reproduite par Hachette qui se borne à démontrer qu'elle conduit à la formule de Bernoulli.

Nous reproduirons, avec quelques modifications, la solution du marquis de l'Hôpital (*Analyse des infiniment petits*, section III, exemple 13), fondée précisément sur le principe de Fermat qui conduit par la voie la plus courte à la formule cherchée.

Prenons pour plan de la figure le plan méridien du lieu PHP'H'. Soient PP' l'axe du monde, HH' la méridienne; HaAH' le grand cercle de l'horizon du lieu et O son centre; hbBh' le petit cercle de la sphère céleste, parallèle à l'horizon et auquel se terminent les arcs crépusculaires.

Soient DABD', $dabd'$ deux parallèles infiniment voisins décrits par le



soleil; AB et *ab* les arcs crépusculaires correspondants, compris entre les cercles HABH', *habh'*; C et *c* les centres de ces parallèles; joignons CA, CB, *ca*, *cb*.

Si nous supposons que ces parallèles comprennent entre eux le parallèle décrit par le soleil au jour du plus petit crépuscule, les arcs AB et *ab*, évalués en degrés, seront égaux, et l'on aura

$$\widehat{ACB} = \widehat{acb}.$$

De là, en projetant l'angle *acb* en $a'Cb'$, sur le plan parallèle DABD', par les arcs de grand cercle $P'aa'$, $P'bb'$, et joignant Ca', Cb', on aura

$$\widehat{acb} = \widehat{a'Cb'}, \quad \text{et par suite,} \quad \widehat{ACB} = \widehat{a'Cb'}.$$

D'où, par la soustraction d'une partie commune,

$$\widehat{ACa'} = \widehat{BCb'},$$

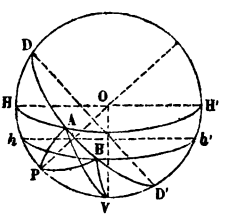
et par suite,

(A) $$\text{arc}\, Aa' = \text{arc}\, Bb'.$$

On a aussi

(B) $$\text{arc}\, aa' = \text{arc}\, bb',$$

puisque ces arcs mesurent l'un et l'autre la distance sphérique des deux cercles parallèles DAD', *dad'*. Il résulte des égalités (A) et (B) que les triangles *rectilignes* infiniment petits $aa'A$, $bb'B$, équiangles en a' et b', sont rigoureusement égaux; et que par suite, sur la sphère, les angles aAa', bBb' sont infiniment peu différents l'un et l'autre. On voit donc, en passant à la limite et supposant que les parallèles DD', *dd'* se confondent, que *le parallèle décrit par le soleil au jour du plus petit crépuscule, coupe sous des angles égaux le grand cercle de l'horizon* HAH', *et le parallèle* hBh' *auquel se terminent les arcs crépusculaires.*



Cela posé, soit DABD' le parallèle cherché coupant sous des angles égaux le grand cercle HAH' et son parallèle hBh'; soit OV la verticale du lieu considéré, déterminant sur la sphère le point V, pôle commun de HAH' et de hBh'; menons les arcs de grand cercle PA, VA; PB, VB; et posons

$$OH = 1; \quad \lambda = \text{latitude du lieu} = 1^{qu} - \widehat{PV}; \quad \widehat{Hh} = H;$$

$$D = \text{la déclinaison cherchée du soleil} = 1^{qu} - \widehat{PA}.$$

Les angles en A et B des triangles sphériques PAV, PBV sont égaux, comme égaux respectivement aux angles HAD, hBD; on a donc

$$\cos PAV = \cos PBV,$$

d'où, en remplaçant les cosinus par leurs valeurs et simplifiant,

$$\frac{\sin\lambda}{1} = \frac{\sin\lambda - \sin D \sin H}{\cos H},$$

ou enfin,

$$\sin D = \sin\lambda \tang\frac{H}{2}.$$

C. Q. F. T.

Problème V. — *Trouver la définition générale des polygones à périmètre maximum inscrits dans une courbe donnée.*

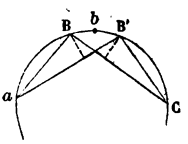
Solution. — Soit $abc\ldots kl$ un polygone à périmètre maximum inscrit dans la courbe donnée. *Regardant tous les sommets du polygone comme fixes, sauf le sommet b,* il est clair que le chemin $ab+cb$ doit être un maximum parmi tous ceux qui relient aux points a et c un point quelconque de l'arc abc. Or, soient aBc, aB'c deux chemins égaux infiniment voisins et comprenant entre eux le chemin maximum abc : l'égalité aB $+ c$B $= a$B' $+ c$B' peut s'écrire

$$(1) \qquad aB' - aB = cB - cB'.$$

Or, en joignant BB', on trouve facilement les expressions

$$aB' - aB = BB' \cos aB'B + \varepsilon^2, \quad cB - cB' = BB' \cos cBB' + \varepsilon'^2,$$

ε^2 et ε'^2 désignant des infiniment petits du second ordre. De ces expressions et de l'égalité fondamentale (1), il résulte que la différence entre BB' cos aB'B et BB' cos cBB' est du second ordre, et par suite que les angles $\widehat{aB'B}$ et $\widehat{cBB'}$ sont infiniment peu différents l'un de l'autre. De là, en passant à la limite et supposant que les chemins aBc, aB'c se confondant avec le chemin maximum abc, on déduit cette conclusion que *deux côtés consécutifs quelconques d'un polygone à périmètre maximum inscrit dans une courbe donnée, sont également inclinés sur la tangente à la courbe circonscrite, menée par l'extrémité commune à ces côtés.*



Première application. — *Si la courbe donnée est un cercle,* on verra que les côtés consécutifs ab, cb étant également inclinés sur la tangente en b, le point b est le milieu de l'arc ac, et que par suite deux côtés consécutifs quelconques ab et bc sont égaux. Donc *parmi les polygones d'un même nombre de côtés inscrits dans un cercle, le polygone régulier a un périmètre maximum.*

Seconde application. — *Si la courbe donnée est une ellipse* (E) *ayant f, f' pour foyers,* on verra, en appliquant la même condition, que deux côtés consécutifs ab et bc, du polygone à périmètre maximum, étant éga-

lement inclinés sur la tangente en b à l'ellipse (E), sont tangents à une même ellipse (E') homofocale à la proposée; pour la même raison, les côtés suivants bc et cd seraient tangents à une autre ellipse homofocale aux précédentes; mais cette nouvelle ellipse est identique à la précédente (E'), puisqu'elle a en commun avec celle-ci les foyers f, f' et la tangente bc.... Donc, *tout polygone à périmètre maximum inscrit dans une ellipse donnée* (E), *se trouve en même temps circonscrit à une seconde ellipse* (E'), *homofocale à la proposée.*

Remarque I. — D'après un théorème de M. Poncelet, tous les polygones qu'on essayera de former de la même manière que le précédent, se fermeront d'eux-mêmes et auront le même nombre de côtés : et ces polygones, en nombre infini, satisfaisant aux mêmes conditions que le précédent, *seront encore à périmètre maximum.*

Remarque II. — Les polygones ainsi formés sont isopérimètres.

Il suffit, pour le démontrer, de recourir au principe fondamental de la théorie analytique des maximum. Désignons, en effet, par $p, p', p'', \ldots, p_n$, les périmètres d'une série de polygones formés d'après les conditions précédentes et infiniment voisins les uns des autres; les polygones extrêmes p et p_n étant toutefois séparés par un intervalle fini.

Le périmètre p étant maximum, la variation du périmètre, quand on passe de p à p', est, ou rigoureusement nulle, ou seulement infiniment petite du second ordre.

Ainsi

$$p - p' = 0, \quad \text{ou} \quad p - p' < \varepsilon_1 (x' - x);$$

de même

$$p' - p'' = 0, \quad \text{ou} \quad p' - p'' < \varepsilon_2 (x'' - x');$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p^{(n-1)} - p^{(n)} = 0, \quad \text{ou} \quad p^{(n-1)} - p^{(n)} < \varepsilon_n (x^{(n)} - x^{(n-1)}).$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ étant des infiniment petits du premier ordre et $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$ désignant, *par exemple*, les abscisses des premiers sommets $a, a', a'', \ldots, a^{(n)}$ des polygones dont les périmètres sont $p, p', p'', \ldots, p^{(n)}$. Soit ε_k le plus grand des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$; ajoutant membre à membre les égalités et inégalités précédentes, et remplaçant les ε par ε_k, on aura

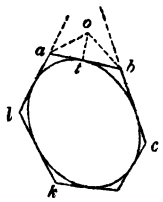
$$p - p^{(n)} = 0, \quad \text{ou} \quad p - p^{(n)} < \varepsilon_k (x^{(n)} - x).$$

Et l'on en conclut que la différence $p - p^{(n)}$ est rigoureusement nulle, puisque l'on peut établir qu'elle est moindre que toute ligne donnée.

Observation. — La démonstration précédente n'a eu d'autre effet que d'établir, dans un cas particulier, ce principe général, qu'une fonction dont la dérivée est constamment nulle, se réduit à une constante.

PROBLÈME VI. — *Trouver la définition générale des polygones à périmètre minimum, circonscrits à une courbe donnée.*

Solution. — Soit *abc*...*kla* un polygone circonscrit à périmètre minimum. *Regardant tous les côtés du polygone comme fixes, sauf le côté ab*, il est clair que *ab* doit coïncider avec celle des tangentes à la courbe fixe qui ferme le polygone *ouvert* A'*lk*...*c*B', en déterminant un périmètre total minimum.

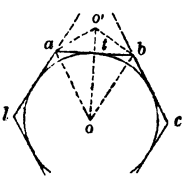


Or, soient AB et A'B' deux tangentes infiniment voisines, comprenant entre elles la tangente cherchée *ab*, et fermant le polygone ouvert par des périmètres égaux; et soit I le point d'intersection de AB, A'B', lequel est infiniment voisin des points de contact T et T'.

D'après le problème 8 du chapitre II (page 87), on pourra construire le point I en menant les bissectrices des angles extérieurs en A, B du polygone AB*c*...*kl*A, et abaissant de leur point d'intersection une perpendiculaire sur AB. Si donc, passant à la limite, on suppose que AB et A'B' se confondent avec *ab*, et si l'on observe qu'en même temps les points T, T', I se confondent avec le point de contact *t* de *ab* sur la courbe, on verra que *dans tout polygone à périmètre minimum circonscrit à une courbe, la normale à la courbe menée par le point de contact de chaque côté, et les bissectrices des angles extérieurs du polygone adjacents à ce côté, concourent en un même point.*

Première application. — *La courbe donnée est un cercle.*

Soit *o'* le point de concours des bissectrices des angles extérieurs en *a* et *b*, *o't* sera normale au cercle et passera par le centre *o*; menons *oa*, *ob* qui seront bissectrices des angles intérieurs en *a* et *b*. Les triangles rectangles *oao' obo'* sont égaux, parce qu'ils ont l'hypoténuse commune *oo'*, et que les perpendiculaires abaissées des sommets de l'angle droit sur l'hypoténuse coupent celle-ci au même point. Il en résulte que les angles *tao* et *tbo* sont égaux, ainsi que les angles *a* et *b* du polygone. Donc, *parmi les polygones d'un même nombre de côtés circonscrits à un cercle, le polygone régulier a un périmètre minimum.*



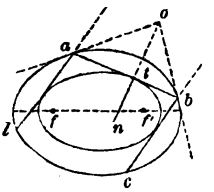
Seconde application. — *La courbe donnée est une ellipse.*

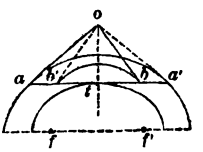
Lemme I. — *Étant données deux ellipses homofocales, si par un point t de l'ellipse intérieure on mène une tangente qui coupe l'ellipse extérieure aux points a et b, la normale en t à l'ellipse intérieure et les tangentes en a et b à l'ellipse extérieure, concourront en un même point.*

Lemme II. — *Un point ne saurait avoir même polaire par rapport à deux ellipses homofocales, à moins que ces ellipses ne se confondent.*

Ces lemmes étant supposés établis, soient *abc*...*kl* un polygone à périmètre minimum circonscrit à une ellipse (E') ayant *f*, *f'* pour foyers, *t* le point de contact du côté *ab* sur l'ellipse, et *o* le point de concours des bissectrices des angles extérieurs du polygone en *a* et *b* : d'après

le théorème général qui précède, la droite ot sera normale à l'ellipse en t. Or, de ce que les côtés la, ab, bc sont tangents à l'ellipse (E'), et de la définition des droites ao et bo, il résulte que l'on peut construire deux ellipses auxiliaires que nous désignerons par (α) et (β), passant, l'une par le point a, l'autre par le point b, ayant pour tangentes respectives en ces points les droites ao et bo, et homofocales à la proposée (E'). Mais ces deux ellipses (α) et (β) coïncident en une seule. Supposons, en effet, qu'il en soit autrement, désignons par aa' et bb' les cordes *distinctes* que la droite atb détermine dans ces ellipses, et joignons oa', ob'. D'après le lemme I, oa' et ob' seraient respectivement tangentes aux ellipses (α) et (β), et par suite le point o aurait même polaire $ab'ba'$ par rapport aux deux ellipses homofocales (α) et (β), ce qui est contraire au lemme II. Donc les deux ellipses (α) et (β) coïncident, et par suite deux sommets consécutifs quelconques du polygone à périmètre minimum appartiennent à une même ellipse homofocale à la proposée. Donc *tout polygone à périmètre minimum, circonscrit à une ellipse donnée* (E'), *se trouve en même temps inscrit à une seconde ellipse* (E), *homofocale à la proposée.*





Corollaire. — On verrait, comme dans le problème précédent, que l'on peut former une infinité de polygones à périmètre minimum, circonscrits à l'ellipse (E') et inscrits à l'ellipse (E), et que tous ces polygones sont isopérimètres.

Scolie. — Si l'on observe que chaque polygone à périmètre minimum circonscrit à l'ellipse (E') est inscrit à l'ellipse (E) et satisfait, en outre, aux conditions imposées aux polygones à périmètre maximum inscrit dans cette ellipse, on pourra renfermer tous les résultats précédents dans cet énoncé : *Si l'on a sur le même plan deux ellipses homofocales* (E) *et* (E') *telles, qu'un premier polygone de n côtés puisse être inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre :*

1°. *On pourra former d'après les mêmes conditions une infinité de polygones ayant le même nombre de côtés et le même périmètre ;*

2°. *Chacun de ces polygones sera de périmètre maximum parmi tous les polygones d'un même nombre de côtés que l'on peut inscrire dans l'ellipse extérieure, et de périmètre minimum parmi tous ceux que l'on peut circonscrire à l'ellipse intérieure.*

Observation. — Ces beaux théorèmes ont été découverts par M. Chasles : leur démonstration analytique, par l'emploi des coordonnées elliptiques, a fait en 1852 le sujet de quelques leçons de M. Liouville au Collége de France. (*Voir* aussi le célèbre Mémoire de M. Steiner : *Journal de Mathématiques*, 1841, page 169.)

§ II. — De la grandeur maximum ou minimum parmi des grandeurs indéterminées.

57. Les problèmes analogues à ceux qui ont été résolus dans le paragraphe précédent, reviennent, en dernière analyse, à déterminer sur une ligne, donnée immédiatement par l'énoncé, ou sur une ligne *auxiliaire* construite au moyen des données de la question, le point pour lequel une grandeur, dont la valeur varie avec la position du point sur la courbe, devient maximum ou minimum.

Il existe une autre classe importante de problèmes dans lesquels *on cherche parmi toutes les lignes, dont les extrémités sont assujetties à certaines conditions communes, mais qui dans l'intervalle des points extrêmes demeurent entièrement indéterminées, celle pour laquelle une grandeur, dont la valeur dépend de la ligne tout entière, devient maximum ou minimum* (Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, 1744, pages 2 et 3) : la grandeur dont il s'agit étant en général une grandeur géométrique, telle qu'une longueur, une aire ou un volume, dont les éléments se forment, d'après une loi donnée, en chacun des points de l'une des courbes que l'on considère. Le premier et le plus célèbre est le problème de la *brachistochrone*, qui fut proposé par Jean Bernoulli en 1696. Dans les *Actes* de Leipsick de l'année suivante (mai, page 206), avant d'en exposer la solution, il fait observer *que les méthodes données jusqu'à ce jour par Fermat, Descartes et les autres, pour la détermination des maxima et minima, sont renfermées dans d'étroites limites, puis qu'elles s'appliquent seulement aux cas où l'on doit chercher, parmi une infinité de grandeurs* données, *la grandeur maximum ou minimum; et que les difficultés que l'on rencontre deviennent autrement sérieuses, dès que les grandeurs parmi lesquelles se trouve le maximum et le minimum demeurent aussi indéterminées que le maximum ou le minimum que l'on cherche.*

En publiant les procédés particuliers qui lui avaient réussi dans la solution de ce problème, et qui, selon lui, pouvaient s'appliquer avec le même succès à d'autres sujets semblables, Bernoulli ajoutait qu'il ne croyait pas à la possibilité de trouver une méthode générale applicable à toutes les questions du même genre.

Euler et Lagrange, comme on le sait, ont donné un démenti formel à ce doute d'un grand géomètre; et le calcul des variations demeure l'un des plus beaux monuments de l'analyse, et dans lequel apparaissent avec le plus d'éclat les qualités de certitude et d'universalité qui sont propres à cette dernière.

Le rôle de la géométrie pure, dans l'étude de ces nouveaux problèmes, paraissait devoir être fort restreint, sinon complétement nul; mais le génie de Maclaurin surmonta toutes les difficultés de la matière, et le *Traité des Fluxions* renferme une méthode générale, fort belle et peu connue, qui conduit par une voie entièrement élémentaire à la solution d'un grand nombre de ces questions, et que nous allons maintenant exposer.

58. Principe fondamental. — *Que l'on désigne en général par* G *les grandeurs variables et indéterminées parmi lesquelles se trouve le minimum (ou le maximum) que l'on cherche, et soit* Γ *une grandeur* constante *de même espece que les grandeurs considérées : si l'on retranche* Γ *de chacune des proposées* G, *on obtient une nouvelle suite de grandeurs* $G' = G - \Gamma$ *qui correspondent aux premières et telles évidemment, qu'à la grandeur minimum* G_1 *de la premiere série correspondra la grandeur minimum* G'_1 *de la seconde; or on exprimera que* $G'_1 = G_1 - \Gamma$ *est le minimum cherché, en décomposant* G_1 *et* Γ *en un même nombre d'éléments correspondants* ΔG_1 *et* $\Delta\Gamma$, *et en exprimant que chacune des différences* élémentaires $\Delta G_1 - \Delta\Gamma$ *est minimum. On aura défini par là chacun des éléments de la grandeur minimum* G_1, *et par suite la grandeur minimum elle-même.*

Remarque I. — Si les grandeurs G se rapportent à des lignes indéterminées parmi lesquelles on cherche celle qui jouit de certaine propriété de minimum ou de maximum, la méthode précédente devra conduire à l'équation différentielle du premier ordre de la ligne cherchée, puisqu'elle doit fournir la définition de chaque élément de cette ligne.

Remarque II. — L'emploi général de la grandeur auxiliaire Γ étant défini comme précédemment, il faut encore observer que cette grandeur Γ doit toujours renfermer quelque élément arbitraire, dont on fixe *à posteriori* la valeur de manière que la grandeur minimum $G_1 = G'_1 + \Gamma$ satisfasse aux conditions qui lui sont imposées par l'énoncé du problème. Au point de vue analytique, cela revient à dire que l'emploi de la méthode actuelle équivaut à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre, intégration qui a dû introduire dans l'équation différentielle du premier ordre qui en résulte une constante arbitraire. Cette constante doit donc naître pareillement de la méthode que nous venons de définir; et bien loin que ce qu'il paraît y avoir d'indéterminé dans cette méthode soit une objection contre la certitude des résultats que l'on en peut tirer, cette indétermination nécessaire, comparée aux résultats que fournit l'analyse, pourrait, s'il en était besoin, servir de confirmation à la méthode.

APPLICATIONS.

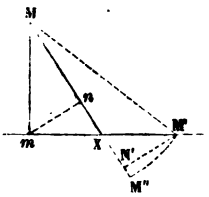
59. o. Lemme général. — Problème. — *Étant donnés un point et une droite, aller du point à la droite par un chemin tellement choisi, que le temps employé à le parcourir avec une vitesse* v, *diminué du temps employé à parcourir sa projection avec la vitesse* $v_1 > v$, *fournisse une différence minimum.* (*Traité des Fluxions*, tome II, n° 572.)

Solution. — Il s'agit de rendre minimum la différence

$$\frac{MM'}{v} - \frac{mM'}{v_1}, \quad \text{ou celle-ci :} \quad MM' - mM'\frac{v}{v_1}.$$

Or, en vertu de la restriction $v < v_1$, on peut représenter le rapport $\frac{v}{v_1}$

par un cosinus; ce sera, par exemple, le cosinus de l'angle que forme mM′ avec une droite MX menée par le point M, et la position de la droite MX sera déterminée par cette relation



$$(1) \qquad \cos(m\mathrm{M}', \mathrm{MX}) = \sin m\mathrm{MX} = \frac{v}{v_1};$$

et l'expression que l'on doit rendre minimum devient alors

$$\mathrm{MM}' - m\mathrm{M}'\cos(m\mathrm{M}', \mathrm{MX}), \quad \text{ou} \quad \mathrm{MM}' - n\mathrm{N}';$$

nN′ étant la projection de mM′ sur la droite MX.

Or, si du point M comme centre on décrit l'arc M′M″ terminé à la droite MX prolongée, on aura

$$\mathrm{MM}' - n\mathrm{N}' = \mathrm{MM}'' - n\mathrm{N}' = \mathrm{M}n + \mathrm{N}'\mathrm{M}'';$$

et comme Mn est constante, on voit que le minimum cherché a lieu quand N′M″ est nulle, c'est-à-dire quand la droite MM′ coïncide avec la droite MX.

Ainsi *le sinus de l'angle d'incidence de la droite cherchée sur la droite donnée, est égal au rapport* $\frac{v}{v_1}$ *des vitesses données.*

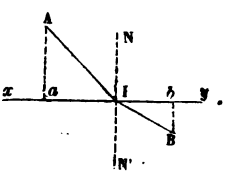
Remarque. — La solution analytique du même problème dépendrait seulement de la théorie élémentaire des maxima pour les fonctions du second degré.

1. Problème de Fermat. — *Étant donnés deux points* A *et* B *situés dans deux milieux différents que sépare la droite* xy; *et* v, v' *désignant les vitesses de propagation de la lumière dans les deux milieux, on demande le chemin* AIB *que doit suivre une molécule lumineuse, pour aller du premier point au second dans un temps minimum.*

Solution. — Abaissons Aa, Bb, perpendiculaires sur xy; il s'agit de trouver un point I sur xy, tel que

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{AI}}{v} + \frac{\mathrm{BI}}{v'} = \text{minimum}.$$

D'ailleurs le chemin à temps minimum ne doit être cherché évidemment que parmi ceux qui rencontrent la droite xy entre les points a et b, et qui ont par conséquent même projection ab sur xy. Si donc on désigne par V une vitesse supérieure à v et à v', le temps employé à parcourir ab avec la vitesse V sera une quantité constante; et nous aurons satisfait à la condition (1), si nous satisfaisons à celle-ci



$$\frac{\mathrm{AI}}{v} + \frac{\mathrm{BI}}{v'} - \frac{ab}{\mathrm{V}} = \text{minimum},$$

ou, en décomposant ab en $a\mathrm{I}+b\mathrm{I}$, si nous satisfaisons à cette dernière

$$(2)\qquad \left(\frac{\mathrm{AI}}{v}-\frac{a\mathrm{I}}{\mathrm{V}}\right)+\left(\frac{\mathrm{BI}}{v'}-\frac{b\mathrm{I}}{\mathrm{V}}\right)=\text{minimum}.$$

Enfin, cette dernière relation sera satisfaite, si l'on peut satisfaire simultanément à chacune de celles-ci

$$(a)\qquad \frac{\mathrm{AI}}{v}-\frac{a\mathrm{I}}{\mathrm{V}}=\text{minimum},$$

$$(b)\qquad \frac{\mathrm{BI}}{v'}=\frac{b\mathrm{I}}{\mathrm{V}}=\text{minimum}.$$

Or, d'après le lemme précédent, si l'on désigne par i et r les angles d'incidence et de réfraction AIN, BIN', chacune des conditions (a) et (b) sera remplie, si l'on a

$$\sin i=\frac{v}{\mathrm{V}},\quad \sin r=\frac{v'}{\mathrm{V}};$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$(x)\qquad \frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v}{v'}.$$

Ainsi *le chemin que doit suivre une molécule lumineuse pour aller d'un premier à un second milieu dans un temps minimum, est tel, que le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction, dans le passage du premier au second milieu, soit égal au rapport des vitesses de propagation de la lumière dans le premier et dans le second milieu.*

Scolie. — La solution *directe* de ce problème dependrait évidemment de la méthode pour la recherche des maxima et minima absolus, exposée dans le chapitre précédent. L'emploi de cette méthode conduit d'ailleurs à une généralisation du théorème précédent qui peut être utile pour des applications ultérieures. Il suffit, pour y parvenir, de remplacer le plan de la figure précédente par une surface quelconque : on verra alors que le chemin AIB, défini par la même condition de minimum, est formé par deux lignes géodésiques AI et IB de la surface, et que les angles $1^{\text{dr}}-i$, $1^{\text{dr}}-r$, sous lesquels ces lignes géodésiques coupent la courbe de séparation xy, sont encore liés par la relation $\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v}{v'}$. On aura d'ailleurs à s'appuyer sur ce principe, que *la courbe qui intercepte des arcs équivalents sur les lignes géodésiques d'une surface, issues du même point, coupe orthogonalement toutes ces lignes géodésiques.*

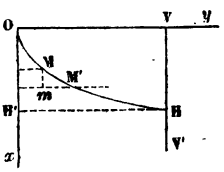
2. Problème. — *Trouver la ligne sur laquelle doit se mouvoir un point matériel soumis à l'action de la pesanteur, pour aller d'un point donné* O *à une verticale donnée* vv', *dans un temps minimum.* (*Traité des Fluxions*, tome II, n° 574.)

Solution. — Soient OMM'H la *brachistochrone* cherchée et H le point *inconnu* où elle coupe la verticale donnée VV'. Menons les horizontales OV

et HH′ des points de départ et d'arrivée, ainsi que la verticale OH′ du point de départ.

Il est facile de reconnaître, à priori, que la courbe cherchée ne saurait avoir aucun de ses points à gauche de la verticale OH′ ou au-dessous de l'horizontale HH′, et que, par suite, on ne doit chercher la brachistochrone que parmi les courbes en nombre infini qui joignent le point O au point (indéterminé) H, et qui sont en outre comprises dans le rectangle OVHH′ : or toutes ces courbes ont même projection HH′ sur l'horizon, et la vitesse acquise en H, par la chute sur l'une d'elles, est la même pour toutes; désignons par v_1 cette vitesse qui demeure indéterminée comme le point H lui-même.

Conformément à la méthode générale, nous dirons : *Si le temps par* OMM′H, *parcouru avec une vitesse variable* v, *est minimum, ce même temps diminué du temps par* HH′, *parcouru avec la vitesse constante* v_1, *sera encore minimum;* et si nous décomposons la courbe et la droite en un même nombre d'éléments correspondants MM′, mM′, la différence des temps que l'on vient d'énoncer sera minimum, si l'on rend minimum cette différence élémentaire :



Temps par MM′ *parcouru avec la vitesse* v, moins *temps par* mM′ *parcouru avec la vitesse* v_1. Or, d'après le lemme, pour que cette dernière différence soit minimum, il suffit, en regardant l'élément MM′ de la courbe comme rectiligne, que l'on ait

$$\sin m\mathrm{MM}' = \frac{v}{v_1},$$

ou

$$\text{(I)} \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{v_1},$$

v désignant la vitesse acquise par le mobile à son arrivée en M, et les ordonnées y de la courbe étant parallèles à l'horizontale OV.

Corollaire I. — La formule (1) fournit, comme on le voit, l'équation différentielle du premier ordre de la brachistochrone pour le cas où la pesanteur agit sur le mobile par des droites parallèles, l'intensité de la pesanteur étant ou constante, ou variable suivant une loi quelconque : cette formule conduit, en outre, à cette conséquence importante, que *la brachistochrone est tangente à la verticale du point de départ, et normale à la verticale* VV′ *à laquelle elle se termine;* car, si l'on fait alternativement $v = 0$ et $v = v_1$ dans la formule, elle donne

$$\frac{dy}{ds} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} = 1.$$

Corollaire II. Dans le cas d'une pesanteur constante, on a

$$v = \sqrt{2gx},$$

et la brachistochrone est une cycloïde.

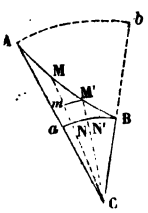
Remarque. — La formule (1) a été donnée pour la première fois par Jean Bernoulli (*Actes de Leipsick*, 1696, mai, page 208) : ce géomètre l'avait obtenue en généralisant le problème de Fermat, et en assimilant la brachistochrone à la trajectoire d'une molécule lumineuse traversant, dans un temps minimum, une suite de milieux de densités différentes, d'épaisseurs infiniment petites, séparés les uns des autres par des surfaces horizontales.

3. Problème. — *Trouver la ligne que doit décrire un point matériel soumis à l'action d'une force émanant d'un centre fixe* C, *pour aller, dans un temps minimum, d'un point donné à une droite donnée, passant par le centre attirant.* (*Traité des Fluxions*, tome II, n° 578.)

Solution. — Soit AMB la brachistochrone cherchée, et B le point inconnu où elle atteint la droite donnée CBb. Du point C, comme centre, décrivons les arcs du cercle Ab et Ba interceptés dans l'angle donné ACB. Il est facile de démontrer, à priori, que la ligne cherchée est tout entière comprise dans le trapèze mixtiligne AbBa. Nous la chercherons donc parmi les lignes qui satisfont à cette condition et qui joignent le point A au point indéterminé B. Or toutes ces lignes, projetées centralement suivant le point C sur la circonférence Ba, ont même projection, à savoir l'arc Ba; et la vitesse acquise en B par la chute sur l'une d'elles est la même pour toutes; soit v_1 cette vitesse. Dès lors, si le temps par AMB parcouru avec la vitesse variable v, est minimum, on aura aussi

$$\mathfrak{T}.(\mathrm{AMB}, v) - \mathfrak{T}.(\mathrm{arc}\, a\mathrm{B}, v_1) = \text{minimum};$$

et si l'on décompose la courbe et l'arc en un même nombre d'éléments correspondants MM′, NN′, la différence précédente sera minimum, si l'on rend minimum chacune des différences élémentaires, telles que



$$(a) \qquad \mathfrak{T}.(\mathrm{MM}', v) - \mathfrak{T}.(\mathrm{NN}', v_1).$$

Or, désignons par r, r', r_1 les distances au centre attirant C des points M, M′, B, et décrivons du centre C le petit arc M′m semblable à l'arc NN′; on a

$$\mathrm{NN}' = \mathrm{M}'m \cdot \frac{r_1}{r'},$$

et, par suite,

$$\mathfrak{T}.(\mathrm{NN}', v_1) = \frac{\mathrm{NN}'}{v_1} = \frac{\mathrm{M}'m}{v_1} \cdot \frac{r_1}{r'} = \frac{\mathrm{M}'m}{v_1 \cdot \frac{r'}{r_1}}.$$

On voit donc que le temps employé à parcourir NN′ avec la vitesse v_1 est égal au temps employé à parcourir M′m avec une vitesse égale à $v_1 \cdot \frac{r'}{r_1}$. Donc, en substituant dans la différence (a), on aura à rendre mi-

nimum

$$\mathfrak{T}.(\mathrm{MM}', v) - \mathfrak{T}.\left(m\mathrm{M}', v_1 \cdot \frac{r'}{r_1}\right).$$

Or, d'après le lemme, pour que cette dernière différence soit minimum, il suffit, en regardant les éléments MM′ et mM′ comme rectilignes, que l'on ait

$$\sin m\mathrm{MM}' = v : v_1 \frac{r'}{r_1};$$

donc, en appelant MT la tangente en M, remplaçant r' par r, sin CMM′ par $\sin \mathrm{CMT} = r\frac{d\theta}{ds}$, il vient

$$\text{(I)} \qquad \sin \mathrm{CMT} = r\frac{d\theta}{ds} = \frac{v}{v_1} \cdot \frac{r_1}{r},$$

pour l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Corollaire I. — Ces formules conduisent encore à cette conséquence, que *la brachistochrone est tangente au rayon* CA, *qui passe par l'origine, et normale au rayon* CB, *auquel elle se termine.*

Corollaire II. — La formule (I), que l'on écrirait

$$r \sin \mathrm{CMT} = \frac{r_1}{v_1} \cdot v,$$

démontre ce théorème dû à Euler, que *la vitesse en chaque point est proportionnelle à la distance du centre d'attraction à la tangente en ce point.*

Corollaire III. — Supposons que *l'attraction exercée par le centre* C *soit proportionnelle à la distance.* Le principe des forces vives donne, dans ce cas,

$$v^2 = (r_0^2 - r^2)\,\mathrm{K}^2;$$

en désignant par r_0 la distance initiale CA, pour laquelle $v = 0$, et l'équation (I) devient alors

$$\text{(I)} \qquad \sin \mathrm{CMT} = r\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sqrt{r_0^2 - r^2}}{\sqrt{r_0^2 - r_1^2}} \cdot \frac{r_1}{r},$$

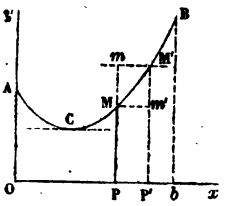
qui représente, comme on le sait, une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence ayant pour diamètre $r_0 - r_1 = \mathrm{A}a$, qui roulerait intérieurement sur la circonférence Ab. On pourrait d'ailleurs établir ce dernier fait directement, et sans beaucoup de peine, en s'appuyant sur la construction de la tangente à l'épicycloïde et sur le lemme que voici : *Que l'on prenne un point quelconque* C *sur le prolongement de l'hypoténuse* bB *d'un triangle rectangle* bMB *et que l'on joigne* CM, *on aura*

$$\sin \mathrm{CMB} = \frac{\sqrt{r_0^2 - r^2}}{\sqrt{r_0^2 - r_1^2}} \cdot \frac{r_1}{r};$$

en posant CM $= r$, C$b = r_0$ et CB $= r_1$.

4. Problème. — *Trouver la courbe plane passant par deux points donnés* A *et* B, *et engendrant une aire minimum par sa rotation autour d'un axe* Ox *situé dans son plan.*

Solution. — Soit ACMB la courbe cherchée pour laquelle l'intégrale $\int y ds$, étendue à tous les points de la courbe compris entre A et B, est *minimum*. Pour toutes les courbes joignant le point A au point B, l'intégrale $\int dx$, et par suite celle-ci, $\lambda \int dx$ prise entre les mêmes limites est une grandeur *constante*, λ désignant une constante arbitraire. Il suffira donc, conformément à la méthode générale, de trouver la courbe pour laquelle $\int (y ds - \lambda dx)$ est un minimum, et cette somme sera minimum si chacun de ses éléments



$$y ds - \lambda dx = \frac{ds}{\frac{1}{y}} - \frac{dx}{\frac{1}{\lambda}}$$

est minimum.

Or, si l'on regarde $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{\lambda}$ comme représentant des vitesses, et si l'on regarde comme donné l'accroissement dy de l'ordonnée dans le passage d'un point M de la courbe au point infiniment voisin M', le minimum aura lieu, d'après le lemme, si l'on a

$$\sin \mathrm{MM}'m' = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{y}.$$

On a donc

$$\text{(III)} \qquad y \frac{dx}{ds} = \lambda,$$

pour l'équation différentielle de la courbe cherchée qui est, par conséquent, une chaînette dont l'axe est perpendiculaire à la droite Ox.

Scolie. — Dans le problème précédent, l'usage que l'on a fait du lemme de la page 113, exigeait que l'on pût regarder comme *donné* l'accroissement dy de l'ordonnée, dans le passage du point M au point infiniment voisin M' de la courbe cherchée. Or, on peut faire voir que cela est permis, au moyen du raisonnement suivant : *Soit* ACMB *la courbe cherchée et* C *son point le plus bas.* D'après la définition du point C, et quoique ce point demeure inconnu, on peut dire que l'on ne doit chercher la courbe demandée que parmi celles qui joignent A à B, en passant par le point C et ayant en ce point leur tangente parallèle à Ox. Or, pour toutes ces courbes les variations totales de l'ordonnée y sont les mêmes de A en C et de C en B, et l'on peut, par conséquent, partager les différences $Y_{(a)} - Y_{(c)}$, $Y_{(b)} - Y_{(c)}$, communes à toutes ces courbes, en un certain nombre de parties très-petites, égales ou inégales,

qui seront les mêmes pour toutes ces courbes; ce qui revient à dire que l'on peut regarder comme donné l'accroissement dy de l'ordonnée de la courbe cherchée. La même remarque s'applique aux problèmes des n°s 2 et 3 et à ceux qu'il nous reste à étudier dans le chapitre suivant.

CHAPITRE V.

Des maxima et minima relatifs.

60. Problème général. — *Parmi toutes les courbes en nombre infini, dont les extrémités sont assujetties à certaines conditions communes, et pour chacune desquelles une certaine fonction* F, *qui dépend de la courbe tout entière, a une même valeur, déterminer celle pour laquelle une autre fonction* Φ *de la courbe a une valeur maximum ou minimum.*

Dans cet énoncé on désigne par *fonction d'une courbe* une grandeur soit géométrique, telle qu'une longueur, une aire ou un volume dont les éléments se forment, d'après une loi donnée, en chacun des points de cette courbe; soit numérique, et la *fonction* est alors représentée par une intégrale définie s'étendant à tous les points de la courbe qui se trouvent compris entre des limites données.

Le problème actuel se ramène très-simplement au problème des maxima et minima absolus qui a été résolu à la fin du dernier chapitre au moyen du principe suivant qui a été employé d'abord par Maclaurin (*Traité des Fluxions*, 1742) et par Euler (*Methodus inveniendi*, 1744, page 188), et qui est d'un continuel usage dans le calcul des variations :

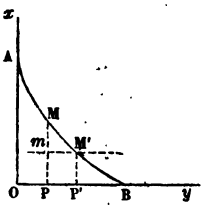
Principe fondamental. — *La ligne cherchée* L, *pour laquelle la fonction* Φ *est maximum ou minimum, parmi toutes les lignes pour lesquelles la fonction* F *a une même valeur, est aussi la ligne pour laquelle la fonction* $F + \lambda\Phi$ *est un maximum ou un minimum absolu,* λ étant un nombre indéterminé.

61. Ce principe est évident en lui-même. Quant à la manière de l'appliquer à la solution de chaque problème, d'après la méthode générale énoncée à la page 113, *on devra retrancher de la fonction* $F + \lambda\Phi$ *une fonction ou grandeur auxiliaire* Γ, *ayant la même valeur pour toutes les courbes que l'on considère, cette valeur dépendant d'ailleurs d'un paramètre indéterminé ; et les fonctions* F, Φ, Γ *étant décomposées en éléments correspondants, on exprimera que chacun des éléments* $\Delta.F + \lambda\Delta.\Phi - \Delta.\Gamma$ *de la fonction totale* $F + \lambda\Phi - \Gamma$ *est maximum ou minimum,* ce qui fournira la définition de chacun des éléments de la courbe cherchée; c'est-à-dire l'équation différentielle de cette courbe. L'équation différentielle obtenue contenant d'ailleurs deux paramètres indéterminés, ou *constantes arbitraires,* l'équation qui résultera de son intégration en contiendra *trois* dont on déterminera les valeurs sous cette double condition : que les extrémités de la courbe satisfassent aux conditions données, et que la fonction F de la courbe acquière la valeur donnée.

APPLICATIONS.

62. 1. Problème. — *Trouver la ligne de la plus vite descente parmi toutes les lignes d'une longueur donnée qui réunissent deux points donnés, dans le cas où les forces qui sollicitent le mobile aux différents points de sa course ont la même direction.* (*Traité des Fluxions*, tome II, n° 588.)

Solution. — Soit AMB la courbe cherchée telle, que l'arc AMB ait une longueur donnée, et que le temps employé à parcourir AMB avec la vitesse variable v, que nous désignerons par $\mathfrak{T}.\mathrm{AMB}, v$, soit un minimum.



D'après la méthode précédente nous devrons chercher la courbe AMB pour laquelle l'expression $arc\,\mathrm{AMB} + \lambda.\mathfrak{T}.(\mathrm{AMB}, v)$, ou celle-ci,

$$\frac{arc\,\mathrm{AMB}}{\lambda} + \mathfrak{T}(\mathrm{AMB}, v),$$

est un minimum absolu; et si nous regardons λ comme représentant une vitesse, il suffira de rendre minimum la somme $\mathfrak{T}(\mathrm{AMB}, v) + \mathfrak{T}(\mathrm{AMB}, \lambda)$.

Enfin, $\overline{\mathrm{BO}}$ étant la projection horizontale de la courbe AMB, et μ désignant une nouvelle vitesse constante et indéterminée comme λ, nous chercherons la courbe pour laquelle l'expression

$$\mathfrak{T}(\mathrm{AMB}, v) + \mathfrak{T}(\mathrm{AMB}, \lambda) - \mathfrak{T}(\mathrm{OB}, \mu)$$

est un minimum.

Enfin, si nous décomposons ces trois grandeurs en un même nombre d'éléments correspondants, et que nous appelions ds et dy l'élément MM' de la courbe et sa projection mM' sur l'horizon, il suffira de rendre minimum chacun des éléments

$$\frac{ds}{v} + \frac{ds}{\lambda} - \frac{dy}{\mu},$$

ou

$$\frac{ds}{\frac{v\lambda}{v+\lambda}} - \frac{dy}{\mu}.$$

Or $\frac{v\lambda}{v+\lambda}$ désignant une nouvelle vitesse V, le minimum aura lieu, d'après le lemme de la page 113, quand on aura

$$\sin \mathrm{M'M}m = \frac{dy}{ds} = \frac{\mathrm{V}}{\mu} = \frac{v\lambda}{\mu(v+\lambda)},$$

ou enfin

$$\frac{dy}{ds} = \frac{v}{\mathrm{C} + \mathrm{C}'v} \quad (\mathrm{I}),$$

C et C' étant deux constantes arbitraires.

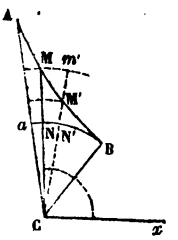
Remarque. — La relation (I) est l'équation différentielle de la brachistochrone cherchée, pour le cas où la pesanteur agit sur le mobile par des droites parallèles et avec une intensité constante ou variable suivant une loi quelconque : elle montre que *la brachistochrone est tangente à la verticale du point de départ*, car, en faisant $v = 0$ dans l'équation, on a

$$\frac{dy}{ds} = 0.$$

2. Problème. — *Parmi toutes les lignes d'égale longueur qui joignent deux points donnés* A *et* B, *trouver celle qui est parcourue dans un temps minimum par un mobile soumis à l'action d'une force émanant d'un centre fixe.* (*Traité des Fluxions*, tome II, n° 591.)

Solution. — Soit AMB la courbe cherchée pour laquelle, en recourant à la notation abrégée que nous avons employée plusieurs fois, la grandeur $\mathfrak{T}(\mathrm{AMB}, v)$ est minimum.

Comme toutes les courbes, parmi lesquelles se trouve celle que nous cherchons, ont la même longueur, en désignant par λ une vitesse indéterminée, la grandeur $\mathfrak{T}.(\mathrm{AMB}, \lambda)$ sera constante pour toutes ces courbes, et par suite la somme $\mathfrak{T}.(\mathrm{AMB}, v) + \mathfrak{T}.(\mathrm{AMB}, \lambda)$ doit être un minimum absolu pour la courbe cherchée. Enfin, pour toutes les courbes qui joignent le point A au point B, l'arc aB, décrit du point C comme centre avec CB pour rayon et terminé aux rayons CA, CB, est constant, et le temps employé à parcourir cet arc avec une vitesse constante μ est constant. Donc la courbe cherchée satisfera à cette condition



$$\mathfrak{T}.(\mathrm{AMB}, v) + \mathfrak{T}.(\mathrm{AMB}, \lambda) - \mathfrak{T}.(a\mathrm{B}, \mu) = \text{minimum}.$$

Enfin, cette condition sera satisfaite si l'on rend minimum

$$\frac{\mathrm{MM'}}{v} + \frac{\mathrm{MM'}}{\lambda} - \frac{\mathrm{NN'}}{\mu} = \frac{\mathrm{MM'}}{\frac{v\lambda}{v+\lambda}} - \frac{\mathrm{M}m'}{\mu.\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CB}}}.$$

Or $\frac{v\lambda}{v+\lambda}$ et $\mu.\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CB}}$ désignant de nouvelles vitesses, cette dernière expression sera minimum si l'on a en chaque point de la courbe cherchée

$$\sin \mathrm{CMM'} = \frac{\frac{v\lambda}{v+\lambda}}{\mu.\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CB}}},$$

ou, en prenant le point C pour origine des coordonnées polaires, et posant $\mathrm{CM} = r$, $\mathrm{CB} = r_0$,

$$r\frac{d\theta}{ds} = \frac{r_0}{r}.\frac{v.\lambda}{\mu(v+\lambda)};$$

ou enfin

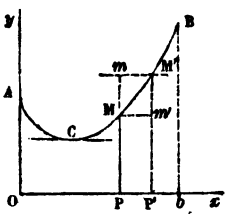
$$\text{(II)} \qquad r^2 \frac{d\theta}{ds} = r_0 \cdot \frac{v}{C + C'v},$$

C, C′ désignant deux constantes arbitraires.

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée : elle montre que la courbe est tangente au rayon CA qui aboutit au point de départ.

3. Problème. — *Parmi toutes les lignes planes d'une longueur donnée qui réunissent deux points donnés* A *et* B, *trouver celle qui, par sa rotation autour de l'axe* Ox *situé dans le même plan, engendre la surface minimum.*

Solution. — Soit AMB la courbe cherchée pour laquelle les intégrales $\int ds$, $\int y ds$ étendues à tous les éléments de la courbe compris entre A et B ont, la première une valeur donnée, la seconde une valeur minimum : pour cette courbe, l'intégrale



$$\int ds + \lambda \int y ds = \int ds (1 + \lambda y)$$

sera un minimum absolu, λ étant un paramètre indéterminé.

D'ailleurs, pour toutes les courbes qui joignent le point A au point B, l'intégrale $\int dx$ ou $\mu \int dx$, prise entre les mêmes limites que la précédente, et dans laquelle μ désigne un nouveau paramètre indéterminé, a une valeur constante. Nous définirons donc la courbe cherchée par cette condition que l'intégrale

$$\int [(1 + \lambda y)\, ds - \mu\, dx]$$

soit un minimum ; et cette condition sera satisfaite si nous rendons minimun chacun de ses éléments $(1 + \lambda y)\, ds - \mu\, dx$, ou

$$\frac{ds}{\frac{1}{1 + \lambda y}} - \frac{dx}{\frac{1}{\mu}}.$$

Or, si l'on regarde $\frac{1}{1 + \lambda y}$ et $\frac{1}{\mu}$ comme représentant des vitesses et que l'on regarde comme *donné* l'accroissement dy de l'ordonnée, dans le passage d'un point M de la courbe au point infiniment voisin M′, le minimum aura lieu si l'on a

$$\sin MM'm' = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{1}{1 + \lambda y}}{\frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{1 + \lambda y},$$

ou

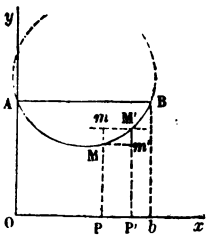
$$\text{(III)} \qquad (y + C) \frac{dx}{ds} = C'$$

qui est l'équation différentielle de la courbe cherchée, et celle-ci est encore une chaînette (*voir* le problème 4, page 119).

4. Problème. — *Parmi toutes les lignes planes d'une longueur donnée*

qui réunissent les extrémités d'une droite donnée AB, *trouver celle dont l'aire* (*comprise entre la courbe et la droite* AB) *est maximum.*

Solution. — Soit prise pour axes des x une droite Ox qui laisse au-dessus d'elle tous les points de la courbe cherchée AMB. L'aire AMBA étant *maximum*, l'intégrale $\int y dx$, prise par rapport à l'axe Ox, sera, au contraire, *minimum*, et comme les intégrales $\int ds$ et $\int dx$ ont une valeur constante pour toutes les courbes que nous considérons, la courbe cherchée sera définie par cette condition que l'intégrale



$$\int [ds + (\lambda y - \mu)\, dx]$$

ou

$$\int [ds - (\mu - \lambda y)\, dx],$$

étendue à tous les points de la courbe compris entre A et B, soit un minimum ; et cette condition sera satisfaite si l'on rend minimum l'élément

$$ds - (\mu - \lambda y)\, dx = \frac{ds}{1} - \frac{dx}{\frac{1}{\mu - \lambda y}};$$

c'est-à-dire si l'on a

$$\sin MM'm' = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{1}{\mu - \lambda y}} = \mu - \lambda y = -\lambda\left(y - \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

On en déduit

$$\text{(IV)} \qquad (y - C) = C'\frac{dx}{ds}$$

pour l'équation différentielle de la courbe cherchée : cette courbe est donc un arc de cercle.

Observation. — On voit, par la série des applications contenues dans le chapitre actuel et dans le § II du précédent, que la méthode de Maclaurin, qui a d'ailleurs ses limites comme toutes les méthodes purement géométriques, ne le cède guère en élégance, en rapidité et en uniformité même, à la méthode analytique des variations, à laquelle elle paraît supérieure, si l'on considère la simplicité élémentaire des moyens qu'elle emploie pour atteindre son but. On peut observer aussi qu'en cette matière encore la géométrie a devancé l'analyse, puisque la belle conception de Maclaurin a précédé de deux et de vingt ans les travaux analytiques d'Euler et de Lagrange sur le même sujet.

CHAPITRE VI.

De la méthode par décomposition en éléments correspondants.

63. La méthode par décomposition en éléments correspondants, considérée au point de vue de ses rapports avec l'analyse, est l'une des plus importantes de la géométrie. Elle s'applique aux deux problèmes

généraux ayant pour objet d'*évaluer une grandeur préalablement décomposée en ses éléments*, ou de *comparer deux grandeurs déjà décomposées en un même nombre d'éléments correspondants.*

Le premier problème se ramène le plus souvent au second; nous verrons un exemple de cette réduction dans le problème de l'attraction d'une sphère sur un point extérieur. Si cette réduction paraît impossible ou inutile, on devra, *ou* chercher une nouvelle signification géométrique des éléments de la grandeur que l'on veut évaluer, *ou bien* combiner deux à deux des éléments de cette grandeur qui se trouvent séparés par un intervalle fini, les *éléments résultants* pouvant présenter une signification géométrique se prêtant mieux à l'évaluation de leur somme; *ou*, d'autres fois enfin, décomposer chaque élément en deux éléments partiels, dont on pourra obtenir plus facilement les sommes respectives. Le problème de la quadrature des épicycloïdes présente une application de ce dernier procédé. Nous donnerons des exemples des deux premiers dans le problème de la rectification des épicycloïdes et dans celui de l'attraction d'un cylindre sur un point extérieur.

Dans le second problème, il peut arriver d'*abord* que la nature de la question permette de décomposer les deux grandeurs considérées en un même nombre d'éléments correspondants qui soient deux à deux dans un rapport constant, et l'on en conclura que ces grandeurs sont entre elles dans le même rapport que leurs éléments; d'*autres fois*, on pourra évaluer la différence entre les éléments correspondants des deux grandeurs et trouver la somme de ces différences élémentaires qui représentera la différence entre les grandeurs considérées, etc. Nous verrons des exemples de ces différents cas dans la théorie des courbes tautochrones et dans la démonstration du théorème de Fagnano.

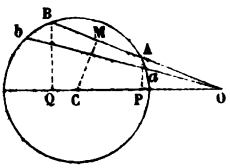
On voit que la méthode actuelle remplit en géométrie le rôle réservé dans l'analyse au calcul intégral, qu'elle a précédé dans l'ordre historique, et qu'elle peut quelquefois remplacer avec avantage; elle a été l'unique instrument des créateurs de la géométrie infinitésimale, Kepler, Cavalleri, Pascal, Fermat, Wallis et Newton; et si son importance actuelle paraît moindre, on doit reconnaître cependant qu'elle a encore un rôle considérable à remplir en éclairant la marche de l'analyse, en la dirigeant dans le choix si important des variables qui conviennent le mieux à chaque question, et lui fournissant ainsi le principe de ses transformations.

APPLICATIONS.

64. 1. *Attraction d'une sphère sur un point extérieur.*

a. L'attraction qu'une couche sphérique homogène exerce sur un point extérieur O étant, à cause de la symétrie, dirigée suivant le diamètre OC qui aboutit au point attiré, nous n'aurons, pour la déterminer, qu'à considérer les composantes suivant OC des attractions élémentaires, et à évaluer leur somme. Soit donc $aAB b$ la circonférence qui, par sa rotation autour de OC, engendre la sphère qui forme la surface extérieure de la

couche. Menons par le point attiré O deux cordes infiniment voisines $\overline{OAB}$, $\overline{Oab}$; des points A et B menons AP, BQ perpendiculaires sur OC, et par le centre C, CM perpendiculaire sur $\overline{OAB}$. Prenons pour élément de volume de la couche sphérique au point A le cylindre ayant pour hauteur ε, épaisseur de la couche, et pour base la surface élémentaire engendrée par Aa tournant d'un angle infiniment petit $d\psi$ autour de OC; si ρ désigne la densité de la couche que nous supposerons constante,



$$\rho\varepsilon \,.\, d\psi \,.\, \mathrm{A}a \,.\, \mathrm{AP}$$

représentera l'élément matériel de la couche en A, et

$$\frac{\rho\varepsilon \,.\, d\psi \,.\, \mathrm{A}a \,.\, \mathrm{AP}}{\overline{\mathrm{OA}}^2} \cdot \cos \mathrm{AOC} = \frac{\rho \,.\, \varepsilon \,.\, d\psi}{\mathrm{OC}} \cdot \frac{\mathrm{A}a \,.\, \mathrm{AP} \,.\, \mathrm{OM}}{\overline{\mathrm{OA}}^2} = d\mathrm{X}$$

sera la composante, suivant OC, de l'attraction exercée par cet élément sur le point matériel O, dont nous prenons la masse pour unité. Mais on a, dans les triangles semblables OAP et OCM, OAa et ObB,

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{OC}}; \quad \frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{B}b}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{A}a + \mathrm{B}b}{\mathrm{OA} + \mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{A}a + \mathrm{B}b}{2\,\mathrm{OM}}.$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{A}a \,.\, \mathrm{AP} \,.\, \mathrm{OM}}{\overline{\mathrm{OA}}^2} = \frac{(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b)\,\mathrm{CM}}{2\,\mathrm{OC}};$$

donc, en substituant dans l'expression de $d\mathrm{X}$, il vient

$$(1) \qquad d\mathrm{X} = \frac{\rho \,.\, \varepsilon \,.\, d\psi}{2\,\overline{\mathrm{OC}}^2} \cdot (\mathrm{A}a + \mathrm{B}b) \,.\, \mathrm{CM}.$$

b. Cela posé, proposons-nous de comparer les attractions exercées par la couche sur les deux points O et O'. Les composantes élémentaires de ces attractions seront dans un rapport constant *si, menant par* O' (que nous supposons quelque part sur le diamètre CO) *des cordes* O'A'B', *o'a'b', qui déterminent dans la circonférence* (C) *des cordes égales aux précédentes,* à savoir : A'B' = AB et $a'b' = ab$, *nous comparons les composantes des attractions exercées respectivement sur* O *et* O' *par les éléments de la couche adjacents aux points* A *et* A'; car on aura pour la nouvelle composante

$$(1') \qquad d\mathrm{X}' = \frac{\rho \,.\, \varepsilon \,.\, d\psi}{2\,\overline{\mathrm{O'C}}^2} \cdot (\mathrm{A}'a' + \mathrm{B}'b') \,.\, \mathrm{CM}';$$

et il résulte de la construction des *éléments correspondants* A et A' : 1° que CM = CM'; 2° que les arcs AB et *ab* étant respectivement égaux aux arcs A'B' et $a'b'$, la différence des premiers, c'est-à-dire $\widehat{\mathrm{A}a} + \widehat{\mathrm{B}b}$ est

égale à la différence des seconds $\widehat{A'a'} + \widehat{B'b'}$. On aura donc

$$\frac{dX}{dX'} = \frac{\dfrac{1}{\overline{OC}^2}}{\dfrac{1}{\overline{O'C}^2}},$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \frac{X}{X'} = \frac{\dfrac{1}{\overline{OC}^2}}{\dfrac{1}{\overline{O'C}^2}}$$

(NEWTON, *Livre des Principes*, proposition 71.)

c. On peut aller plus loin et déterminer géométriquement l'expression même de X.

Observons d'abord que si, dans l'application de la formule (1), on veut n'avoir à considérer qu'un seul système de cordes issues du point O et dont les longueurs croissent de zéro à 2R, il faudra doubler l'expression de dX, afin qu'elle représente la somme des composantes suivant OC des attractions exercées sur le point O par les éléments de la couche adjacente aux points A et B à la fois. On aura donc, vu la nouvelle signification de dX,

$$(1) \qquad dX = \frac{\rho \cdot \varepsilon \cdot d\psi}{\overline{OC}^2} \cdot (Aa + Bb)\,CM;$$

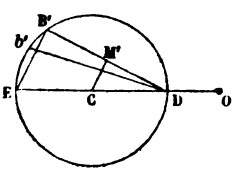
et si l'on fait la somme des composantes des attractions exercées sur O par les deux portions de la couche qui correspondent aux zones totales engendrées par Aa et Bb, on aura

$$\frac{2\pi\rho \cdot \varepsilon}{\overline{OC}^2}(Aa + Bb)\,CM$$

pour cette somme, et l'attraction totale sera, par suite,

$$X = \frac{2\pi\rho\varepsilon}{\overline{OC}^2}\int(Aa + Bb)\,CM.$$

Or, si par l'une des extrémités du diamètre CO on mène les cordes DB' et Db' respectivement égales à AB et ab, et qu'on abaisse CM' perpendiculaire sur DB', on aura



$$\widehat{Aa} + \widehat{Bb} = \widehat{B'b'},\ CM = CM',$$

et, par suite,

$$\int(Aa + Bb)\,CM = \int B'b'.CM' = R.2R = 2R^2,$$

car l'élément $B'b'.CM'$ de cette dernière somme représente le produit par le rayon R de l'accroissement $Db' - DB'$ de la corde DB'.

On a donc enfin

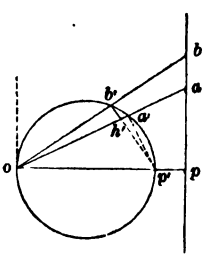
$$\text{(I)} \qquad X = \frac{\rho . 4\pi R^2 \varepsilon}{\overline{OC}^2}.$$

2. *Attraction d'un cylindre homogène et indéfini sur un point extérieur.*

a. Évaluons d'abord *l'attraction exercée sur un point extérieur o par un prisme homogène, indéfini, et dont la section droite ε est infiniment petite.* Soient $d = op$ la distance du point attiré o à la droite $\overline{pab}$ qui représente l'axe du prisme; $\rho\varepsilon.\overline{ab}$ l'élément matériel du prisme adjacent à ab. On aura, pour la composante suivant op de l'attraction exercée par cet élément sur le point o,

$$dX = \frac{\rho.\varepsilon.\overline{ab}}{r^2} \cdot \cos aop,$$

en posant $oa = r$. Or, si l'on construit la circonférence $op'a'b'$, réciproque de la droite pab, le point o étant pris pour *origine* et la *puissance* $op.op' = oa.oa' = ob.ob'$ étant égale à 1, à chaque élément ab de la droite correspondra un élément $a'b'$ de la circonférence, et l'on aura, en posant $oa' = r'$,



$$\frac{ab}{r} = \frac{a'b'}{r'}, \quad \frac{ab}{r^2} = \frac{a'b'}{rr'} = a'b'.$$

Il viendra donc, en substituant dans dX,

$$dX = \rho\varepsilon . a'b' \cos a'op', \quad X = \rho\varepsilon \int a'b' . \cos a'op'.$$

Mais, si l'on joint $p'b'$ qui coupe oa' en h' sous un angle très-peu différent d'un droit, on voit, en négligeant les infiniment petits du second ordre, que $a'b'.\cos a'op' = b'h'$, et que d'ailleurs $b'h'$ est l'accroissement de la corde $p'a'$ quand on passe de a' en b' sur la circonférence $p'a'b'o$. Il en résulte que la somme $\int a'b'.\cos a'Op'$, étendue à tous les points de la circonférence, est égale à $2op' = \frac{2}{op} = \frac{2}{d}$; et que, par suite,

$$\text{(1)} \qquad X = \frac{2\rho\varepsilon}{d}.$$

Ainsi, *l'attraction est proportionnelle à la section du prisme et en raison inverse de sa distance au point attiré.*

b. Revenons au problème proposé, et menons par le point O un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre et déterminant dans celui-ci une section circulaire dont le centre est C. Si l'on prend pour élément de volume du cylindre un prisme droit indéfini, ayant pour base, sur le plan

du cercle C, l'un des éléments superficiels de ce dernier; on verra que l'attraction de chaque prisme élémentaire sur le point O est proportionnelle à l'aire de sa base, qu'elle est en raison inverse de la distance du point O à cette base et dirigée suivant la droite qui mesure cette distance. Le problème proposé est donc ramené à celui-ci : *Déterminer l'attraction exercée par un cercle sur un point extérieur, la loi de l'attraction étant celle de la raison inverse de la distance.* Pour le résoudre, il nous suffira d'évaluer l'attraction exercée sur le point O par une couronne circulaire d'épaisseur dR. Menons, à cet effet, les cordes infiniment voisines OAB, Oab, et désignons par dY *la somme des composantes suivant* OC, *des attractions exercées sur le point* O *par les éléments superficiels adjacents aux points* A *et* B *à la fois;* on aura, en abaissant CM perpendiculaire sur AB (*voir* la figure de la page 126),

$$dY = 2\rho dR\left(\frac{Aa}{OA}+\frac{Bb}{OB}\right)\frac{OM}{OC} = \frac{2\rho dR}{OC}\left(\frac{Aa}{OA}+\frac{Bb}{OB}\right)OM.$$

Or les triangles semblables OAa, OBb donnent

$$\frac{Aa}{OA}=\frac{Bb}{OB}=\frac{Aa+Bb}{OA+OB}=\frac{Aa+Bb}{2OM},$$

on en déduit

$$\frac{Aa}{OA}+\frac{Bb}{OB}=\frac{Aa+Bb}{OM}.$$

Il vient donc, en substituant dans l'expression de dY,

$$dY = \frac{2\rho dR}{OC}(Aa+Bb),$$

et, par suite,

$$(2) \qquad Y = \frac{\rho . 4\pi R dR}{OC}.$$

Scolie. — On démontre aisément pour le cas actuel, comme pour celui d'une couche sphérique, qu'un point situé dans l'intérieur du solide est en équilibre sous l'action des forces opposées auxquelles il est soumis.

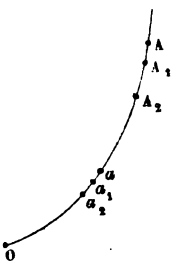
3. *Théorie géométrique des courbes tautochrones.*

a. Un arc de courbe AaO est dit *tautochrone* lorsqu'il est tel, qu'un mobile abandonné sans vitesse initiale en l'un des points de cet arc, et soumis dans tous les cas à l'action des mêmes forces, emploie le même temps à parvenir à l'extrémité O de cet arc, quel que soit son point de départ.

b. Principe fondamental. — *Si un point matériel, soumis à l'action d'une force constante ou variable suivant une loi donnée, décrit une courbe* AaO *telle, que la composante tangentielle de la force accélératrice soit à chaque instant proportionnelle à l'arc compris entre la position actuelle du mobile et un point fixe* O *de la courbe qu'il décrit, cette courbe sera tautochrone, et le mobile parviendra au point* O *après un*

temps constant, indépendant de la position particulière du point de départ.

Démonstration. — Imaginons que deux mobiles partent en même temps des points A et a de l'arc AaO : nous appellerons *arcs résidus* à l'époque t les arcs compris entre les positions occupées par les deux mobiles à cette époque et le point O extrémité de l'arc, et nous désignerons par k le rapport des arcs *primitifs* AO, aO.



Cela posé, à la fin du premier instant les deux mobiles auront parcouru les arcs très-petits AA_1, aa_1, proportionnels aux composantes tangentielles des forces qui les sollicitent, composantes que l'on peut regarder comme constantes pendant le temps très-court dont nous parlons; ces arcs AA_1, aa_1 seront donc, en vertu de l'hypothèse, proportionnels aux arcs primitifs AO, aO, et l'on aura

$$\frac{AA_1}{aa_1} = \frac{AO}{aO} = k,$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \frac{A_1O}{a_1O} = \frac{AO}{aO} = k.$$

Ainsi, *les arcs résidus à la fin du premier instant sont proportionnels aux arcs primitifs.* Les vitesses V_1, v_1 acquises par les deux mobiles à la même époque sont également proportionnelles aux composantes tangentielles, et par suite aux arcs primitifs ou aux arcs résidus; on a donc

$$(I) \qquad \frac{V_1}{v_1} = \frac{A_1O}{a_1O} = k.$$

Dans le second instant les deux mobiles seront sollicités par de nouvelles forces qui seront dans le rapport des arcs A_1O, a_1O, et animés en outre des vitesses acquises qui sont dans le même rapport; donc, si A_1A_2, a_1a_2 désignent les arcs parcourus dans ce second instant, on aura

$$\frac{A_1A_2}{a_1a_2} = \frac{A_1O}{a_1O} = k,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \frac{A_2O}{a_2O} = \frac{AO}{aO} = k,$$

et les vitesses *totales* V_2, v_2, acquises à la même époque, seront dans le même rapport,

$$(II) \qquad \frac{V_2}{v_2} = \frac{A_2O}{a_2O} = k.$$

Ainsi, *les arcs résidus à la fin du second instant sont encore dans le même rapport que les arcs primitifs;* et ainsi de suite.

Le rapport des arcs résidus à une époque quelconque du mouvement simultané des deux mobiles demeure donc constamment égal au rapport des arcs primitifs. Il en résulte que ces arcs s'évanouissent en même temps, et que les deux mobiles parviennent au même instant à l'extrémité de l'arc AaO, dont le tauchrononisme se trouve par là établi.

Scolie. — Les courbes tautochrones, pour le cas où le mobile qui les parcourt n'éprouve aucune résistance, ont encore la même qualité quand la résistance éprouvée par le mobile est proportionnelle à sa vitesse.

Une démonstration entièrement semblable à la précédente suffit pour établir ce théorème, dans le cas de tautochronisme que nous venons d'examiner.

Corollaire I. — *Tautochrone dans le cas d'un mobile soumis à l'action de la pesanteur.* En rapportant la courbe cherchée AaO à l'horizontale Ox et à la verticale Oy du point O, on trouve immédiatement pour son équation différentielle

$$g\frac{dy}{ds} = ks. \tag{I}$$

Si l'intensité de la pesanteur est constante, g est un nombre invariable, et la courbe cherchée est une cycloïde.

Si l'intensité de la pesanteur est variable avec la distance du mobile à un plan horizontal quelconque, g est une fonction de y, et l'équation (I) conduit à l'équation de la courbe exprimée par une relation entre y et s.

Dans les deux cas, et en supposant pour le second que g ne devienne pas infini pour $s = 0$, on voit qu'à l'origine des arcs parcourus en temps égaux la tautochrone est normale à la direction de la pesanteur.

Corollaire II. — *Tautochrone dans le cas d'un mobile attiré par un centre fixe.* Le centre attirant C étant pris pour origine des coordonnées polaires, et le point O étant pris pour origine des arcs s, on a, pour l'équation différentielle de la courbe cherchée,

$$f(r)\cos\alpha \quad \text{ou} \quad f(r)\frac{dr}{ds} = ks; \tag{II}$$

α étant l'angle de la tangente en un point de la courbe avec le rayon vecteur de ce point, et $f(r)$ désignant la force, émanant du centre C, qui sollicite le mobile arrivé en ce point.

Examinons, en particulier, *le cas où la force est proportionnelle à la distance.* On a alors $f(r) = r$; et en désignant par r_0 le rayon vecteur qui aboutit à l'origine des arcs, on trouve d'abord

$$r^2 - r_0^2 = ks^2;$$

tirant de là la valeur de s pour la porter dans la relation (II), élevant au carré l'équation résultante, et remplaçant ds^2 par $dr^2 + r^2 d\theta^2$, il vient en résolvant par rapport à $d\theta$,

$$r\frac{d\theta}{dr} = \pm\sqrt{\frac{r^2\left(\frac{1}{k} - 1\right) + r_0^2}{r^2 - r_0^2}}. \tag{2}$$

Les variétés les plus remarquables des courbes représentées par cette équation sont fournies par les hypothèses suivantes :

$\frac{1}{k} < 1$; la courbe est alors une épicycloïde;

$\frac{1}{k} = 1$; la courbe se réduit à une droite située à une distance r_0 du centre attirant;

$\frac{1}{k} > 1$ et $r_0 = 0$; la courbe est une spirale logarithmique ayant le point C pour origine.

Remarque. — L'équation primitive $f(r)\cos\alpha = ks$, dans laquelle on suppose $s = 0$, montre que *au point origine des arcs parcourus en temps égaux, la tautochrone est normale au rayon qui aboutit au centre attirant*, pourvu que la valeur correspondante de $f(r)$ ne soit pas nulle. (*Voir* sur le même sujet un article de M. Puiseux : *Journal de Mathématiques*, 1844, page 409.)

Observation. — Le tautochronisme de la cycloïde a été, comme on le sait, découvert par Huyghens (*Horolog. oscillat.*, prop. 25, page 57). Newton généralisa ensuite le théorème d'Huyghens, et c'est la démonstration même qu'il a donnée de la propriété semblable de l'épicycloïde (*Livre des Principes*, prop. 51), que nous avons reproduite, en établissant le théorème que nous avons pris pour point de départ dans la recherche des courbes tautochrones. L'ouvrage d'Huyghens, déjà cité, contient sur le même sujet une dernière proposition remarquable (prop. 26, page 58), dans laquelle il donne l'expression du rapport des temps employés, *par le même mobile dans le même mouvement*, à parcourir une partie AA′ de l'arc AO de la cycloïde et la partie restante A′O. Ce théorème particularisé conduit à cette conséquence curieuse, que l'on retrouve également par l'analyse, que *si dans le mouvement d'un point sur la cycloïde on mène l'horizontale du point de départ, celle du point le plus bas ou sommet de la cycloïde, et l'horizontale équidistante, le temps employé par le mobile dans son passage de la première à la troisième sera égal à celui qu'il emploiera à passer de la troisième à la seconde.*

Il ne serait peut-être ni sans intérêt, ni sans difficulté, de rechercher quelles sont toutes les courbes que l'on pourrait, pour abréger, appeler courbes *mesochrones*, qui jouissent de la même propriété.

4. Problème de Viviani. — En 1692, Viviani proposa aux *analystes* de son temps sous ce titre : *Ænigma geometricum de miro opificio testitudinis quadrabilis hemisphericæ*, le problème suivant :

Percer une voûte hémisphérique de quatre fenêtres égales, sous cette condition que le reste de la voûte soit exactement carrable.

Nous allons rapporter le principe de la solution de Leibnitz qui résolut le problème le jour même où il lui fut communiqué (*Acta Lipsiæ*, juin 1792, page 274). Quoique cette solution dépende de l'analyse, elle n'est pas cependant étrangère à notre sujet, et nous fournira un nouvel exemple

de l'importance que présente, dans les problèmes de ce genre, le choix des éléments de la grandeur que l'on veut évaluer.

Appelons *équateur* le grand cercle $Ea'aE'$ qui limite l'hémisphère donné, et soit P le *pôle*. Soit AA' une courbe quelconque tracée sur la surface de l'hémisphère. Nous regarderons chaque point A de cette courbe comme défini par sa latitude $\lambda = \frac{\text{arc } Aa}{R}$, et sa longitude $L = \frac{\text{arc } Ea}{R}$, R désignant le rayon de la sphère.

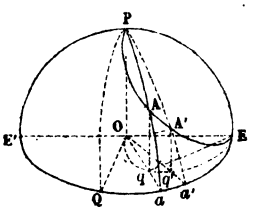
Cela posé, supposons qu'il s'agisse d'évaluer l'aire sphérique comprise entre un arc de la courbe donnée, les méridiens qui passent par les extrémités de cet arc, et l'arc que ces méridiens interceptent sur l'équateur. A cet effet, prenons pour *élément* de la surface que nous avons à évaluer l'aire élémentaire $AA'a'a$, comprise entre deux méridiens infiniment voisins, et les arcs qu'ils interceptent sur la courbe donnée et sur l'équateur. D'après la mesure de la zone sphérique, et en négligeant un infiniment petit du second ordre, l'aire élémentaire ainsi définie a pour mesure

$$R^2 \sin\lambda\, dL,$$

λ désignant la latitude du point A de la courbe AA', et dL désignant la différence des longitudes des points A, A' de cette courbe; par suite l'aire finie considérée aura pour expression

$$R^2 \int_{L_0}^{L_1} \sin\lambda\, dL,$$

L_0, L_1 désignant les longitudes des extrémités de l'arc AB, et λ étant regardée comme une fonction de L. L'aire sphérique considérée sera donc exactement carrable, si l'on établit entre L et λ, longitude et latitude d'un même point A de la courbe cherchée, une relation telle, que l'intégrale



$$\int \sin\lambda\, dL,$$

prise entre certaines limites, ait une valeur algébrique; et c'est ce que l'on peut réaliser d'une infinité de manières.

Prenons pour exemple la première et la plus simple des *cinq* constructions données par Jean Bernoulli pour résoudre ce problème (*Acta Lipsiæ*, août 1692, page 370); c'est-à-dire prenons, pour définition de la courbe AA', la relation

$$\lambda = L;$$

cette courbe passe alors par le pôle P, par le point E de l'équateur qui est l'origine des longitudes, et ne s'étend que sur le quart de l'hémisphère considéré; en outre, l'intégrale $\int \sin\lambda\, d\lambda$ prise entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$ étant égale à 1, on voit qu'après avoir enlevé la partie du quart de l'hé-

misphère limitée, inférieurement par la courbe PAE, la portion restante est exactement carrable et a pour valeur le carré du rayon.

Remarque I. — Cette première construction de Bernoulli revient identiquement, au fond, à celle qui fut publiée plus tard par Viviani lui-même. Car si l'on abaisse d'un point quelconque A de la courbe PAE que l'on vient de définir, la perpendiculaire Aq sur le plan qui sert de base à l'hémisphère, que l'on mène le rayon Oqa, on a

$$Aq = R \sin\lambda = R \sin L,$$

et, par suite,

$$Oq = R \cos L = R \cos EOa = R \cos EOq;$$

donc, si l'on joint Eq, l'angle OqE est droit, et le point q appartient à la demi-circonférence décrite sur le rayon OE comme diamètre. Il résulte immédiatement de là cette construction :

Que l'on prenne un diamètre du grand cercle qui sert de base à l'hémisphère, et que sur chacune de ses moitiés, considérée comme diamètre, et dans le plan de la base, on décrive une circonférence : les cylindres droits ayant pour bases ces deux circonférences détacheront de la voûte hémisphérique quatre fenêtres simples ou deux fenêtres doubles, et l'aire de la partie restante sera équivalente au carré construit sur le diamètre de la sphère (Viviani).

Remarque II. — Vers la fin de son *Traité de calcul intégral*, tome II, page 546, Bossut fait cette remarque curieuse, que la construction de Viviani fournit aussi *une* solution de cette autre question proposée par Euler : *Construire sur la base d'un hémisphère une courbe telle, que le volume du cylindre élevé perpendiculairement sur son aire et terminé à la surface hémisphérique, ait une expression algébrique.*

Il est facile de démontrer, en effet, que si l'on prend pour base du cylindre le *triangle* formé par le rayon OQ perpendiculaire à OE, le quadrant EQ et la demi-circonférence $Oqq'E$ (qui sert de base au cylindre de Viviani), le volume correspondant a pour valeur les *deux neuvièmes* du cube du rayon.

Prenons, en effet, pour *élément* de la grandeur que nous voulons évaluer le volume $AA'q'qaa'$. Cet élément est la différence entre la pyramide sphérique $OAA'a'a$ et la pyramide $OAA'q'q$, dont les volumes ont respectivement pour expression

$$\frac{1}{3}R^3 \sin L\,dL \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}R^3 \sin L \cos^2 L\,dL.$$

On a donc

$$dV = \frac{1}{3}R^3 \sin^3 L\,dL$$

pour expression du volume élémentaire, et

$$V = \frac{1}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 L\,dL = \frac{1}{3}R^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}R^3$$

pour expression du volume total.

5. *Rectification des épycloïdes allongées ou raccourcies d'après Pascal.*

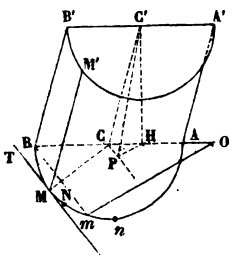
On a vu, dans le chapitre premier (page 56), qu'un arc $d\sigma$ de roulette, produit par le roulement de l'arc ds de la courbe mobile sur un arc égal de la courbe fixe, a pour expression

$$d\sigma = \pm\left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right)\cdot rds,$$

R, R' désignant les rayons de courbure en leur point de contact actuel des deux lignes fixe et mobile, et r désignant la distance à ce point de contact du point qui décrit la roulette. Plaçons-nous dans le cas particulier où les lignes fixe et mobile sont des circonférences de cercle : $\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}$ est alors un facteur constant, et l'évaluation d'un arc quelconque d'épicycloïde allongée ou raccourcie dépend du problème suivant :

Trouver la somme des produits des arcs élémentaires qui composent un arc fini du cercle mobile, multipliés respectivement par les distances de l'une de leurs extrémités à un point fixe (le point décrivant).

Voici, d'après Pascal (*OEuvres*... 1779, tome V, pages 402 et suiv.), la solution de ce problème, solution qui fournit une nouvelle application de la méthode *par les solides auxiliaires* (première partie, page 17).



Soient OACB le diamètre de la circonférence donnée qui passe par le point donné O, C étant le centre de cette circonférence; mn un arc infiniment petit et Om la distance de l'une de ses extrémités au point O : joignons Bm et désignons par φ l'angle OBm. Posons

$$OC = d, \quad CA = R, \quad OB = d + R.$$

Le triangle OBm donne

$$\overline{Om}^2 = (d+R)^2 + 4R^2\cos^2\varphi - 4R(d+R)\cos^2\varphi,$$

ou

$$(1) \qquad \overline{Om}^2 = (d+R)^2 - 4dR\cos^2\varphi.$$

Cela posé, prenons sur CO le point H tel, que l'on ait

$$(a) \qquad \overline{CH}^2 = 4dR,$$

et par le point H ainsi obtenu, élevons sur le plan du cercle une perpendiculaire indéfinie HC' sur laquelle nous prendrons le point C' tel, que l'on ait

$$(b) \qquad CC' = d + R;$$

et joignons CC'. Enfin, menant par le point C, CP parallèle à Bm, abaissons du point C' la perpendiculaire C'P sur CP; il suffira pour cela d'abaisser C'H perpendiculaire sur le plan de la base (ce qui est déjà fait),

de mener HP perpendiculaire sur CP et de joindre C'P. Le triangle C'PC, rectangle en P, donnera alors, en observant que $CP = CH \cos\varphi$,

$$\overline{C'P}^2 = \overline{CC'}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CC'}^2 - \overline{CH}^2 \cos^2\varphi,$$

ou, d'après les relations (a) et (b),

$$\text{(I)} \qquad \overline{C'P}^2 = (d+R)^2 - 4dR\cos^2\varphi;$$

on a donc

$$\text{(A)} \qquad Om = C'P.$$

D'ailleurs, si l'on mène les rayons CM, CN constamment perpendiculaires aux cordes Bm, Bn, on aura

$$\text{(B)} \qquad \text{arc } mn = 2 \text{ arc } MN.$$

Or, si l'on considère le cylindre oblique ayant pour base le cercle AmB, et dont les génératrices sont égales et parallèles à CC', on voit, en menant la génératrice MM', que C'P mesure la distance du point M' à la tangente MT de la base du cylindre; que, par suite, C'P. arc MN est l'élément de la surface latérale du cylindre. Il en résulte, à cause des relations (A) et (B), que la somme des produits

$$\int \text{arc } mn . \overline{Om},$$

prise entre certaines limites, représente le double de l'aire d'une portion de surface cylindrique et peut, par conséquent, s'exprimer par le double de la génératrice CC' multipliée par un arc de l'ellipse, section droite du cylindre : on trouve d'ailleurs, pour les demi-axes A et B de cette ellipse,

$$A = R, \quad B = R \cdot \frac{d-R}{d+R},$$

le petit axe devenant nul et l'ellipse se réduisant à une droite quand $d = R$, c'est-à-dire quand le point décrivant O est situé sur la circonférence mobile.

Enfin, si l'on revient au problème primitif, on conclura facilement de ce qui précède qu'un arc quelconque d'épicycloïde, allongée ou raccourcie, est équivalent en longueur à un certain arc d'une ellipse semblable à la précédente et dont les axes sont par suite proportionnels aux distances maximum et minimum du point décrivant à la circonférence mobile.

6. *Autre solution du même problème.*

a. Que la courbe mobile roule sans glisser d'abord sur la convexité, puis sur la concavité d'une courbe fixe, de manière que dans ces deux mouvements les mêmes points de la courbe mobile soient successivement en contact avec les mêmes points de la courbe fixe : un point m invariablement lié à la courbe mobile décrira deux arcs de roulettes, l'une extérieure, l'autre intérieure, dont nous désignerons les longueurs par Σ et σ,

en appelant s la longueur de l'arc de la courbe mobile qui s'est enroulé sur un arc égal de la courbe fixe. On aura donc, en conservant les mêmes notations que précédemment,

$$\Sigma = \int \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R}\right) rds, \quad \sigma = \int \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) rds,$$

et, par suite,

$$\text{(A)} \qquad \Sigma + \sigma = 2 \int \frac{1}{R'} rds,$$

l'arc σ étant regardé comme positif ou négatif, suivant que l'on aura $\frac{1}{R'} > \frac{1}{R}$ ou $\frac{1}{R'} < \frac{1}{R}$, et, par suite, $\Sigma + \sigma$ étant, dans les mêmes circonstances, une somme ou une différence. Il résulte de là que *la somme algébrique des deux arcs de roulette extérieure ou intérieure est indépendante de la nature de la courbe fixe.*

Supposons que l'on ait $R =$ constante et $R' =$ constante, c'est-à-dire que les roulettes deviennent des épicycloïdes allongées ou raccourcies; on aura alors

$$\Sigma = \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R}\right) \int rds \quad \text{et} \quad \sigma = \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) \int rds,$$

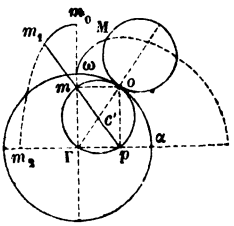
et, par suite,

$$\text{(B)} \qquad \frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R}}{\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}} = \frac{R + R'}{R - R'}.$$

Les formules (A) et (B) conduisent à cette conséquence importante que : *Si l'on sait rectifier un arc quelconque de l'épicycloïde, allongée ou raccourcie, produite par le mouvement d'un point m invariablement lié à une circonférence* (C') *qui roule,* intérieurement *par exemple, sur une circonférence* (C), 1° *on connaîtra, par l'application de la formule* (B), *l'arc d'épicycloïde* extérieure *engendré par le même point m dans le roulement extérieur de la circonférence* (C') *sur la même circonférence* (C); 2° *si l'on forme la somme* $\left(\text{si } \frac{1}{R'} > \frac{1}{R}\right)$ *ou la différence* $\left(\text{si } \frac{1}{R'} < \frac{1}{R}\right)$ *des deux arcs ainsi obtenus, on aura la valeur générale de la somme algébrique des deux arcs de roulette intérieure et extérieure engendrés par le mouvement du point m pendant que la circonférence* (C') *roule intérieurement et extérieurement sur une autre circonférence quelconque* (Γ) *de rayon* ρ; 2° *la somme* $\Sigma + \sigma$ *étant ainsi déterminée, la formule* (B) *dans laquelle on remplacera* R *par* ρ, *permettra de déterminer respectivement* Σ *et* σ, *c'est-à-dire les arcs de roulette extérieure et intérieure engendrés par le mouvement du point m dans le roulement de la circonférence* (C') *sur la circonférence* (Γ).

b. Application de ces principes à la rectification des épicycloïdes simples.

On connaît ce théorème, dû à Cardan, qu'un point m d'une circonférence (c') roulant intérieurement sur une circonférence (Γ) de rayon double $\rho = 2R'$, engendre un diamètre du cercle (Γ). Désignons par Σ_1 et σ_1 les arcs de roulette extérieure et intérieure décrites par le point m, pendant que l'arc $om = s$ de la circonférence (c') s'enroule sur l'arc égal ωo de la circonférence (Γ) : la figure donne immédiatement



$$\sigma_1 = \omega m = 2R'\left(1 - \cos\frac{s}{2}\right):$$

on aura donc, d'après la formule (B),

$$\Sigma_1 = \sigma\frac{\rho + R'}{\rho - R'} = \sigma.\frac{3R'}{R'} = 3\sigma,$$

ou

$$\Sigma_1 = 6R'\left(1 - \cos\frac{s}{2}\right);$$

puisque dans le cas actuel $\rho = 2R'$. Et si l'on remarque que $\frac{1}{R'}$ étant ici plus grand que $\frac{1}{\rho}$, on doit faire la somme arithmétique de Σ_1 et σ_1 pour avoir la valeur générale de la somme algébrique $\Sigma + \sigma$, on aura

$$(A') \qquad \Sigma + \sigma = 8R'\left(1 - \cos\frac{s}{2}\right).$$

Enfin, la combinaison des relations (A') et (B) donne pour le cas général,

$$(X) \qquad \Sigma = 4R'\left(1 - \cos\frac{s}{2}\right).\frac{R + R'}{R},$$

$$(x) \qquad \sigma = 4R'\left(1 - \cos\frac{s}{2}\right).\frac{R - R'}{R},$$

qui coïncident avec les formules données par Newton (*Livre des Principes*, propositions 48 et 49).

c. Rectification des épicycloïdes allongées ou raccourcies.

On déduit immédiatement du théorème de Cardan que l'épicycloïde allongée ou raccourcie, décrite par un point m_1 invariablement lié à une circonférence (c') qui roule intérieurement sur une circonférence (Γ) de rayon double, peut être engendrée par le mouvement d'un point m_1 d'une droite mp dont les extrémités m, p décrivent deux droites rectangulaires $\Gamma\omega$ et $\Gamma\alpha$; cette épicycloïde intérieure est donc une ellipse, et l'arc $\sigma_1 = m_0 m_1$ de cette épicycloïde n'est autre chose qu'un arc d'ellipse que nous désignerons par ε.

On a donc successivement, en suivant la même marche et adoptant la

même notation que précédemment,

$$\sigma_1 = \varepsilon, \quad \Sigma_1 = \sigma_1 . \frac{\rho + R'}{\rho - R'} = \varepsilon . \frac{3R'}{R'} = 3\varepsilon ; \quad \Sigma_1 + \sigma_1 = 4\varepsilon.$$

Et, en passant au cas général,

$$\Sigma + \sigma = 4\varepsilon, \quad \frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{R + R'}{R - R'}.$$

D'où l'on déduit enfin

$$(Y) \qquad \Sigma = 2\varepsilon . \frac{R + R'}{R},$$

$$(y) \qquad \sigma = 2\varepsilon . \frac{R - R'}{R}.$$

Scolie. — La quadrature des épicycloïdes peut s'obtenir avec la même facilité par une méthode toute semblable : nous renvoyons pour ce sujet à l'article des *Nouvelles Annales*, duquel nous avons extrait ce qui précède (1845, tome IV, page 83).

7. Théorème de Fagnano.

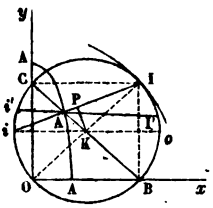
La différence de deux arcs elliptiques AA', *aa' dont les extrémités* A *et a,* A' *et a' forment deux couples de points associés, est égale à la différence des distances du centre de la courbe aux normales passant par les extrémités de l'un des deux arcs.*

Démonstration. — On appelle *points associés* d'une ellipse deux points tels, que les normales menées à la courbe par ces points soient également éloignées du centre, les distances du centre à ces points étant d'ailleurs inégales.

Cela posé, regardons l'ellipse comme décrite par un point A d'une droite MN dont les extrémités glissent sur deux axes rectangulaires Ox, Oy : cette ellipse peut être considérée comme une épicycloïde raccourcie décrite par le point A invariablement lié à la circonférence OBIC qui roulerait intérieurement sur la circonférence de rayon double OI = 2R, ayant pour centre le point O. D'ailleurs, le point *fixe* O et le centre instantané de rotation I sont toujours deux points diamétralement opposés de la circonférence mobile; et, pour chaque position du point décrivant A, la distance du centre de la courbe à la normale en ce point n'est autre chose que la distance du point O à la droite AI qui joint le point considéré A au centre instantané de rotation correspondant I; *ou encore* la distance à la droite AI du point de la circonférence mobile diamétralement opposé au point I. Cela posé,

Première partie. — Que IA prolongée coupe en un second point *i* la circonférence mobile OBIA. Quand le mouvement de la circonférence mobile l'aura amenée en contact avec la circonférence fixe suivant le point *i*, la distance du centre O de l'ellipse à la normale menée par la nouvelle position A_1 qu'aura prise le point décrivant A, sera *égale* à la distance

la droite Ai du point o diamétralement opposé au point i, distance évidemment égale elle-même à celle du centre O à la première normale AI. D'ailleurs, les distances du centre O aux deux points A et A_1 sont inégales; car la première *est* OA, la seconde *est égale* à oA, et ces dernières lignes sont inégales, à moins que AI ne soit perpendiculaire au diamètre BAC. Donc : 1° *à chaque point de l'ellipse correspond un second point* associé *au premier, suivant les deux conditions de la définition.*



Seconde partie. — Menons par le point A une nouvelle corde I'Ai' infiniment voisine de la première. Les deux arcs d'ellipse, dS et ds, produits par l'enroulement sur la circonférence fixe des arcs II' et ii' de la circonférence mobile, seront, d'après ce qui précède, des arcs *associés*. Or ces arcs ont pour expressions

$$dS = AI(\varepsilon' - \varepsilon) = AI\left(\frac{II'}{R} - \frac{II'}{2R}\right) = \frac{AI.II'}{2R},$$

$$ds = \frac{Ai.ii'}{2R}.$$

D'ailleurs, si l'on abaisse KP perpendiculaire sur $\overline{IAi}$, K étant le milieu de la droite BAC, on trouve facilement ces relations

$$\frac{AI}{II'} = \frac{Ai}{ii'} = \frac{AI - Ai}{II' - ii'} = \frac{2AP}{II' - ii'}$$

il en résulte

$$dS - ds = \frac{2AP\left(\overline{II'}^2 - \overline{ii'}^2\right)}{2R(II' - ii')} = \frac{AP(II' + ii')}{R}.$$

Or, si l'on pose AK $= a$, $\widehat{IAB} = \varphi$, l'angle $\widehat{IAI'} = d\varphi$ a pour expression $\frac{II' + ii'}{2R}$. Il vient donc, en substituant,

$$dS - ds = 2AP.d\varphi = 2a\cos\varphi\, d\varphi;$$

et de là, en désignant par p la distance du centre O à la normale AI et observant que

$$p = 2KP = 2a\sin\varphi,$$

d'où

$$dp = 2a\cos\varphi\, d\varphi,$$

il vient enfin

$$(x) \qquad dS - ds = dp,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Observation. — On trouve facilement dans la figure précédente les relations qui existent entre les abscisses de deux points associés, et de cette relation on déduit par le calcul que *le lieu géométrique du point de concours des tangentes menées à l'ellipse par deux points associés est*

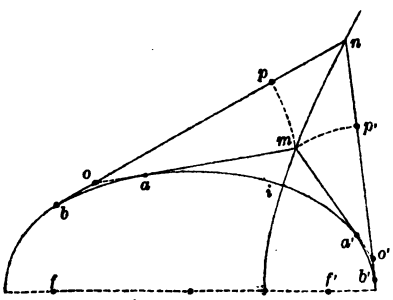
une conique homofocale à la proposée. Il en résulte que le théorème de Fagnano est compris, comme cas particulier, dans les belles propositions découvertes par M. Chasles et relatives à la construction géométrique des arcs d'ellipse à différence rectifiable. C'est par ces propositions que nous allons terminer cette dernière série d'applications.

8. Théorème I. — *Soit i l'un des points d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole homofocales. Si par un point de l'une de ces courbes on mène deux tangentes à l'autre, la différence des arcs de cette dernière compris entre le point i et chacun des points de contact sera égale à la différence des tangentes correspondantes.*

Démonstration. — Par deux points infiniment voisins m et n de l'hyperbole, menons à l'ellipse homofocale les tangentes ma, ma' et nb, nb'; et soient o, o' les points d'intersection de ma et de nb, de ma' et de nb'. Des points o et o' comme centres, avec om et $o'm$ pour rayons, décrivons les arcs de cercle mp et mp', terminés respectivement aux rayons on et $o'n$. Les segments np, np' pourront être considérés, en négligeant les infiniment petits du second ordre, comme les projections sur les tangentes nb, nb' de l'arc élémentaire nm de l'hyperbole; et comme la tangente en n à cette courbe fait des angles égaux avec nb et nb', on aura, à un infiniment petit du second ordre près, l'égalité

$$(1) \qquad np = np'.$$

Or, si l'on désigne par s et $s + ds$, par s' et $s' + ds'$, les arcs ia et ib, ia' et ib'; par t et $t + dt$, par t' et $t' + dt'$ les longueurs des tangentes am et bn, $a'm$ et $b'n$; et si l'on observe que ds, ds', dt et dt' sont des nombres positifs dans la figure, on pourra d'abord, *en négligeant les infiniment petits du troisième ordre*, écrire les égalités



$$ds = ao + bo,$$
$$ds' = a'o + b'o.$$

La construction qui a défini les points p et p' nous donnera ensuite

$$np = on - om = (bn - bo) - (oa + am) = (bn - am) - (ao + bo) = dt - ds,$$
$$np' = dt' - ds';$$

et si l'on porte ces valeurs dans la relation (1), il vient enfin

$$(\mathrm{I}) \qquad d(s - s') = d(t - t').$$

Ainsi les variations correspondantes des différences *arc* ai — *arc* $a'i$, $\overline{am} - \overline{a'm}$, demeurent toujours égales quand le point m se déplace sur

l'hyperbole nmi, homofocale à l'ellipse proposée. Ces différences elles-mêmes seront donc égales si leurs valeurs initiales sont les mêmes. Or c'est ce qui a lieu en effet; car si l'on considère le point i comme la position initiale du point m, on a, en ce point,

$$0 = s_0 - s'_0 = t_0 - t'_0.$$

Corollaire. — On déduit aisément de ce théorème les solutions des problèmes suivants.

1. *Diviser géométriquement un arc d'ellipse (ou d'hyperbole) en deux arcs partiels à différence rectifiable.*

2. *Étant donné un arc d'ellipse (ou d'hyperbole), construire géométriquement un second arc ayant pour l'une de ses extrémités un point donné de la courbe, et ayant avec le premier une différence rectifiable.* Ce dernier problème ayant deux solutions, les deux arcs répondant à la question présentent eux-mêmes une différence rectifiable, et cette observation conduit à un théorème de géométrie.

3. *Trouver l'expression géométrique finie de la différence entre les longueurs infinies des asymptotes et des deux branches d'une hyperbole.* On peut consulter sur ce sujet un article de M. Terquem, auquel nous avons emprunté la démonstration précédente (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1844, page 506).

Théorème II. — *Étant données deux ellipses (ou deux hyperboles) homofocales, si par un point quelconque de la courbe extérieure on mène deux tangentes à la courbe intérieure, la différence entre la somme de ces tangentes et l'arc de la courbe intérieure intercepté entre leurs points de contact, conserve une valeur constante.*

La démonstration ne diffère de la précédente que par les modifications qui résultent dans la figure de ce que le point m se déplace sur une courbe de même espèce que la proposée; et l'on parvient, en ayant égard à ces modifications, à la relation

$$d\,(t + t') = d\,(s + s') = d\,.\,\text{arc}\,aa'.$$

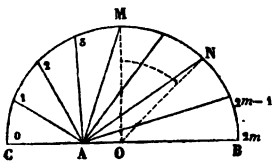
Ainsi les variations correspondantes de la somme des tangentes et de l'arc intercepté demeurent égales quand le point m se déplace sur une courbe homofocale à la proposée et de même espèce qu'elle; donc la différence entre la somme des tangentes et l'arc intercepté demeure constante.

Corollaire. — Ce théorème fournit un second moyen de construire des arcs d'ellipse à différence rectifiable, et la comparaison de cette seconde solution avec celle qui résulte de l'emploi du théorème I, conduit aisément à cette conséquence : *Dans une ellipse, ou dans une hyperbole, si par les quatre extrémités de deux arcs à différence rectifiable on mène les tangentes à la courbe, ces tangentes forment un quadrilatère qui est circonscriptible à un cercle.*

9. *Limites inférieure et supérieure du périmètre de l'ellipse entière, ou d'un arc quelconque d'ellipse. — Construction géométrique analogue à celle de Bernoulli (Jean).*

Il résulte des considérations employées dans la question 7, que si l'on porte sur une même droite, et à la suite l'une de l'autre, deux longueurs CA et AB égales aux demi-axes d'une ellipse, et que sur la droite résultante $CB = 2R$, comme diamètre, on décrive une demi-circonférence, la somme $\int$ des produits obtenus en multipliant chacun des éléments de cette demi-circonférence par la distance de l'une de ses extrémités au point de division A du diamètre CB, divisée par $2R$, sera égale au périmètre du quart de l'ellipse dont CA et AB sont les demi-axes, périmètre que nous désignerons par $\frac{E}{4}$.

Cela posé, divisons la demi-circonférence CB en un nombre pair $2m$ parties égales; soient $0, 1, 2, 3 \ldots 2m-1$, $2m$ les $2m+1$ points de division, dont les extrêmes coïncident respectivement avec les points C et B, et désignons par $d_0, d_1, d_2 \ldots d_{2m}$ les distances de ces points au point de division A du diamètre CB. Si l'on suppose, comme cela arrive dans la figure, $CA < AB$, on aura



$$d_0 < d_1 < d_2 \ldots < d_{2m-1} < d_{2m},$$

et d'ailleurs chacun des arcs 01, 12, 23... aura pour valeur $\frac{\pi R}{2m}$.

Or, on apercoit immédiatement que la partie de la somme $\int$ qui se rapporte à l'arc 12, par exemple, est moindre que le produit de cet arc par la distance d_2, et supérieure à son produit par la distance d_1. On a donc cette double inégalité

$$\frac{\pi R}{2m}(d_0+d_1+d_2+\ldots+d_{2m-1}) < \int < \frac{\pi R}{2m}(d_1+d_2+d_2+\ldots+d_{2m}),$$

et de là, en divisant par $2R$, remplaçant $\int : 2R$ par $\frac{E}{4}$ et multipliant par 4,

$$(I) \quad 2\pi\left(\frac{d_0+d_1+d_2+\ldots+d_{2m-1}}{2m}\right) < E < 2\pi\left(\frac{d_1+d_2+d_3+\ldots+d_{2m}}{2m}\right).$$

On peut donc construire géométriquement les rayons de deux circonférences dont les périmètres comprennent le périmètre de l'ellipse donnée, et la différence entre ces rayons étant égale à la différence des demi-axes de l'ellipse, divisée par $2m$, l'erreur commise, en substituant au périmètre de l'ellipse donnée le périmètre de l'une de ces circonférences, pourra être aussi petite qu'on le voudra.

La même méthode s'applique encore à l'évaluation approchée d'un arc quelconque d'ellipse, moindre qu'un quadrant. Il suffit, en effet, de construire préalablement l'arc MN de la circonférence CB qui, en s'enroulant intérieurement sur la circonférence du rayon double, engendre l'arc d'ellipse considéré, e; de diviser cet arc MN en $2m$ parties égales, et de

joindre les points de division au point A. On trouve alors, en employant les mêmes notations,

$$(\text{II})\quad \frac{\text{arc MN}}{2\text{R}}\left(\frac{d_0+d_1+\ldots+d_{2m-1}}{2m}\right) < e < \frac{\text{arc MN}}{2\text{R}}\left(\frac{d_1+d_2+\ldots+d_{2m}}{2m}\right).$$

Or, en désignant par $\widehat{\text{O}}$ l'angle au centre qui correspond à l'arc MN, on a

$$\frac{\text{arc MN}}{2\text{R}} = 2\pi\cdot\frac{\frac{1}{2}\text{O}}{4^{\text{dr}}};$$

et en substituant cette valeur dans les inégalités précédentes, on voit que l'arc d'ellipse e se trouve compris entre deux arcs de cercle semblables, correspondant à des angles au centre égaux à $\frac{\text{O}}{2}$, et dont la différence des rayons peut être aussi petite qu'on le veut.

Remarque. — En appliquant au système de deux ellipses égales sa théorie générale du mouvement de rampement d'une courbe sur une autre, Jean Bernoulli parvint aux deux inégalités suivantes :

$$(\text{III})\quad 2\pi\cdot\frac{\frac{d_0}{2}+d_2+d_4+\ldots+\frac{d_{2m}}{2}}{m} < \text{E} < 2\pi\cdot\frac{d_1+d_3+\ldots+d_{2m+1}}{m},$$

$2m$ désignant actuellement, non plus un nombre pair quelconque, mais une puissance de 2 (*Opera omnia,* tome I, page 448).

Les formules de Bernoulli fournissent des limites plus resserrées que les précédentes, mais elles ne s'appliquent pas comme celles-là (du moins sans une démonstration spéciale), à la rectification approchée d'un arc quelconque d'ellipse. Il serait toutefois intéressant de les obtenir directement par l'emploi des considérations précédentes : elles nous paraissent l'auxiliaire le plus naturel que l'on puisse employer dans cette recherche, car elles conduisent presque nécessairement à la construction géométrique des différentes lignes que l'on a à considérer, construction que l'on ne fait intervenir qu'avec effort par l'emploi du mouvement de rampement.

Les formules (III), qui avaient été données sans démonstration par Bernoulli, ont été établies pour la première fois par M. Prouhet, dans une intéressante étude *sur les reptoires,* insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1854, pages 274 et 235.

FIN.

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

NOV 10 '67 H

CANCELLED

Math 5008.55
Des methodes en geometrie.
Cabot Science 003328707
3 2044 091 901 272